

TRABAJO PRACTICO N° 6 **MÉTODOS NUMÉRICOS APROXIMADOS**

Un concepto fundamental vinculado a la resolución aproximada de ecuaciones y, en general, de los métodos numéricos aproximados, es el de error. Se hace imprescindible definir normas en conjuntos donde se presentan matrices y vectores asociados.

Normas vectoriales y matriciales

Sea un espacio vectorial \mathbf{V} sobre el cuerpo de los reales \mathbf{R} , una norma vectorial es una función $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ que hace corresponder a cada vector $\vec{x} \in \mathbf{V}$ un escalar, denotado por $\|\vec{x}\|$, tal que verifica las siguientes propiedades:

- 1) $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \|\vec{x}\| \geq 0 \wedge \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- 2) $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall k \in \mathbf{R}, \|k \cdot \vec{x}\| = |k| \cdot \|\vec{x}\|$
- 3) $\forall \vec{x} \in \mathbf{V}, \forall \vec{y} \in \mathbf{V}, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Mencionamos algunas de las normas más usadas.

Sea $\vec{x} \in \mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, con $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definimos

- a) $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ norma de orden 1
- b) $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ norma de orden 2 ó euclídea
- c) $\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i|\}_{i=1}^n = \max\{|x_1|; |x_2|; \dots; |x_n|\}$ norma de orden infinito o norma de máxima magnitud.

Ejemplo. Si $\mathbf{V} = \mathbf{R}^4$ y $\vec{x} = (1.25, 0.02, -5.15, 0) \Rightarrow \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^4 |x_i| = |1.25| + |0.02| + |-5.15| + |0| = 6.42$,

$$\|\vec{x}\|_2 = \left[1.25^2 + 0.02^2 + (-5.15)^2 + 0^2 \right]^{1/2} = \sqrt{28.0854}, \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|1.25|; |0.02|; |-5.15|; |0|\} = 5.15.$$

Sea $\vec{x} \in \mathbf{V} = \mathbf{R}^{m \times n}$, con $\vec{x} = A = ((a_{i,j})) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$, definimos

- a) $\|A\|_e = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right\}^{1/2}$ norma euclídea o de Frobenius
- b) $\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}_{i=1}^m = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{1,j}|; \sum_{j=1}^n |a_{2,j}|; \dots; \sum_{j=1}^n |a_{m,j}| \right\}$ norma de orden infinito o norma de fila
- c) $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right\}_{j=1}^n = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{i,1}|; \sum_{i=1}^m |a_{i,2}|; \dots; \sum_{i=1}^m |a_{i,n}| \right\}$ norma de orden 1 o norma de columna
- d) $\|A\|_2 = \sqrt{R(A^T \cdot A)}$ norma de orden 2 o espectral, donde se define:

el radio espectral $R(A^T \cdot A) = \max\{|\lambda_i|\}$, es decir, el máximo valor absoluto de los autovalores de $(A^T \cdot A)$.

Ejemplo. Si $V = \mathbf{R}^{3 \times 3}$ y $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$:

$$\|A\|_e = \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i,j}^2 \right\}^{1/2} = (90 + 36 + 90)^{1/2} = 14.7$$

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{i,j}| \right\}_{i=1}^3 = \max\{16; 10; 16\} = 16 ; \quad \|A\|_1 = \|A^T\|_\infty = \max\{16; 10; 16\} = 16$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{R(A^T \cdot A)} = 12, \text{ pues } A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 90 & 0 & -54 \\ 0 & 36 & 0 \\ -54 & 0 & 90 \end{pmatrix} \text{ cuyos autovalores son } \lambda_{1,2} = 36 \wedge \lambda_3 = 144.$$

Cálculo aproximado de las raíces de una ecuación

Un método aproximado para obtener las raíces de una ecuación de la forma $f(x)=0$, consiste en representar gráficamente la función $f(x)$ y determinar donde cruza al eje x . Si bien este proceso es útil para la estimación de las raíces, carece de precisión. Una aproximación alternativa es usar una prueba de ensayo y error, consistente en elegir un valor de x y evaluar si $f(x)$ es cero. Si no es así, se hace otra conjetura para x y se evalúa nuevamente $f(x)$ para determinar si el nuevo valor da una mejor estimación de la raíz; y así sucesivamente. Este método así empleado tiene un carácter fortuito y, a menos que se emplee una estrategia sistemática que permita encaminarse a la raíz buscada, es ineficiente.

Surgen así diferentes técnicas o métodos, de fácil implementación en las computadoras actuales, que presentan según el caso particular al cual son aplicados, ventajas y desventajas. Distinguimos aquí los métodos que *usan intervalos* para encontrar raíces de los métodos llamados *abiertos*. Los primeros empiezan con suposiciones que encierran o contienen a la raíz y reducen sistemáticamente el ancho del intervalo mientras que los segundos, si bien también involucran iteraciones sistemáticas de ensayo y error, no requieren que la suposición inicial encierre a la raíz.

Mencionaremos aquí algún ejemplo de métodos iterativos para el cálculo de raíces, pero el objetivo principal del práctico se centra en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

Ejemplo: Iteración de punto fijo

El método de iteración de punto fijo consiste en desarrollar un algoritmo modificando la ecuación algebraica $f(x) = 0$ en una forma equivalente dada por $x = g(x)$. Tomando una aproximación inicial $x^{(0)}$ para la raíz, se obtiene un nuevo valor aproximado $x^{(1)}$ con $x^{(1)} = g(x^{(0)})$. Con $x^{(1)}$ se obtiene $x^{(2)} = g(x^{(1)})$. Así, recurrentemente, se genera una sucesión $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots\}$, con el algoritmo

$$\boxed{x^{(n+1)} = g[x^{(n)}]}$$

En algunos casos, los valores así obtenidos dan aproximaciones cada vez más cercanas a la raíz buscada y la sucesión obtenida se dice que es convergente a la raíz. Aumentando el número de iteraciones se obtiene la raíz con la aproximación deseada. Para interrumpir el proceso iterativo se puede considerar la norma $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| < \varepsilon$, siendo ε un valor positivo prefijado que indica acota el error absoluto de la diferencia de dos términos sucesivos de la sucesión $x^{(n)}$. Sin embargo, en otros casos, la sucesión puede resultar divergente, o sea que los valores obtenidos se alejan de la raíz a medida que crece el número de iteraciones.

Puede probarse que la sucesión $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots\}$ resulta convergente si $|g'(x^{(0)})| < 1$; es decir, la convergencia ocurre si la magnitud de la pendiente $g(x^{(0)})$ es menor que la pendiente de x .

Ejercicio

Sea la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$, ¿cuántas iteraciones son necesarias, mediante el método de punto fijo para obtener una aproximación con cuatro decimales exactos ($\varepsilon < 0.0001$)?

Como $x^3 + x - 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2 + 1}$. Así, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

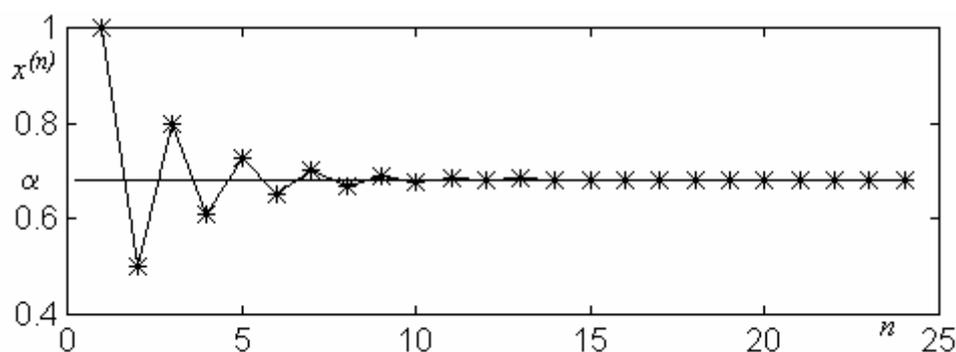
Siendo $g'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, si $x_0 = 1$ resulta $g'(x)|_{x^{(0)}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |g'(x^{(0)})| < 1$.

El algoritmo correspondiente es, $x^{(n+1)} = \frac{1}{1 + [x^{(n)}]^2}$.

Los valores obtenidos son:

$x^{(0)} = 1.0000$	$x^{(1)} = \frac{1}{2} = 0.5000$	\vdots	\vdots
$x^{(1)} = 0.5000$	$x^{(2)} = \frac{1}{1 + 0.5000^2} = 0.8000$	$x^{(10)} = 0.6854$	$x^{(17)} = 0.6822$
$x^{(2)} = 0.8000$	$x^{(3)} = \frac{1}{1 + 0.8000^2} = 0.6098$	$x^{(11)} = 0.6804$	$x^{(18)} = 0.6824$
$x^{(3)} = 0.6098$	$x^{(4)} = \frac{1}{1 + 0.6098^2} = 0.7290$	$x^{(12)} = 0.6836$	$x^{(19)} = 0.6823$
$x^{(4)} = 0.7290$	$x^{(5)} = \frac{1}{1 + 0.7290^2} = 0.6530$	$x^{(13)} = 0.6815$	$x^{(20)} = 0.6823$
$x^{(5)} = 0.6530$	$x^{(6)} = \frac{1}{1 + 0.6530^2} = 0.7011$	$x^{(14)} = 0.6828$	\vdots
$x^{(6)} = 0.7011$	$x^{(7)} = \frac{1}{1 + 0.7011^2} = 0.6705$	$x^{(15)} = 0.6820$	
$x^{(7)} = 0.6705$	$x^{(8)} = \frac{1}{1 + 0.6705^2} = 0.6899$	$x^{(16)} = 0.6825$	
$x^{(8)} = 0.6899$	$x^{(9)} = \frac{1}{1 + 0.6899^2} = 0.6675$	\vdots	
\vdots	\vdots		

Son necesarias 20 iteraciones.



Ejercicio

Dada la ecuación algebraica $x^3 - 13x + 13 = 0$, resolver los siguientes items.

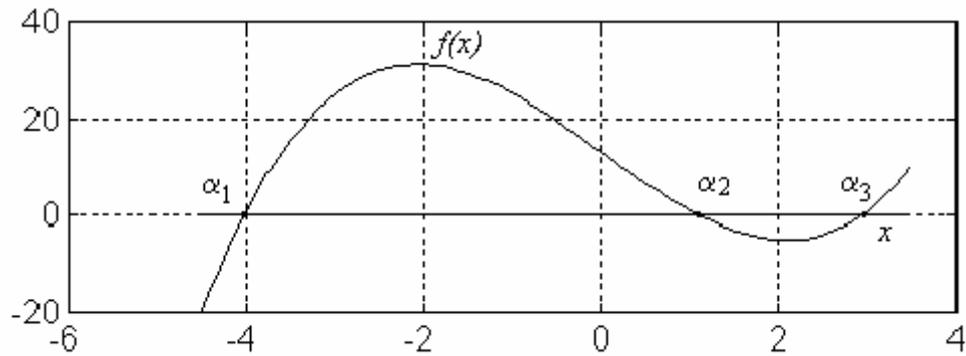
1) Separar las raíces.

x	$-\infty$	-10	-5	-4	0	1	2	3	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

$-5 < \alpha_1 < -4$

$1 < \alpha_2 < 2 \quad 2 < \alpha_3 < 3$

α_1 es raíz: $f(-5) < 0 \wedge f(-4) > 0$; α_2 es raíz: $f(1) > 0 \wedge f(2) < 0$; α_3 es raíz: $f(2) < 0 \wedge f(3) > 0$



2) Diseñar un algoritmo para un proceso iterativo de punto fijo.

2.a) $x^3 - 13x + 13 = 0 \Rightarrow x^3 = 13(x-1) \Rightarrow x = \sqrt[3]{13(x-1)}$. Así, $g(x) = \sqrt[3]{13(x-1)} \Rightarrow g'(x) = \frac{13}{2 \cdot \sqrt[3]{[13(x-1)]^2}}$

Si $x^{(0)} = -5 \Rightarrow g'(-5) = 0.3561 \rightarrow |g'(-5)| < 1$.

El algoritmo es: $x^{(n+1)} = [13(x^{(n)} - 1)]^{1/3}$. Converge para $-5 < \alpha_1 < -4$.

2.b) $x^3 - 13x + 13 = 0 \Rightarrow 13x = x^3 + 13 \Rightarrow x = \frac{x^3}{13} + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{13} + 1 \wedge g'(x) = \frac{3x^2}{13}$.

Si $x^{(0)} = 1 \Rightarrow g'(1) = 3/13 = 0.2308 \rightarrow |g'(1)| < 1$.

El algoritmo es: $x^{(n+1)} = \frac{[x^{(n)}]^3}{13} + 1$. Converge para $1 < \alpha_2 < 2$.

2.c) $x^3 - 13x + 13 = 0 \Rightarrow x^3 = 13x - 13 \xrightarrow{x>0} x^2 = 13 - \frac{13}{x} \Rightarrow x = \sqrt{13 - \frac{13}{x}}$ ($x > 0$).

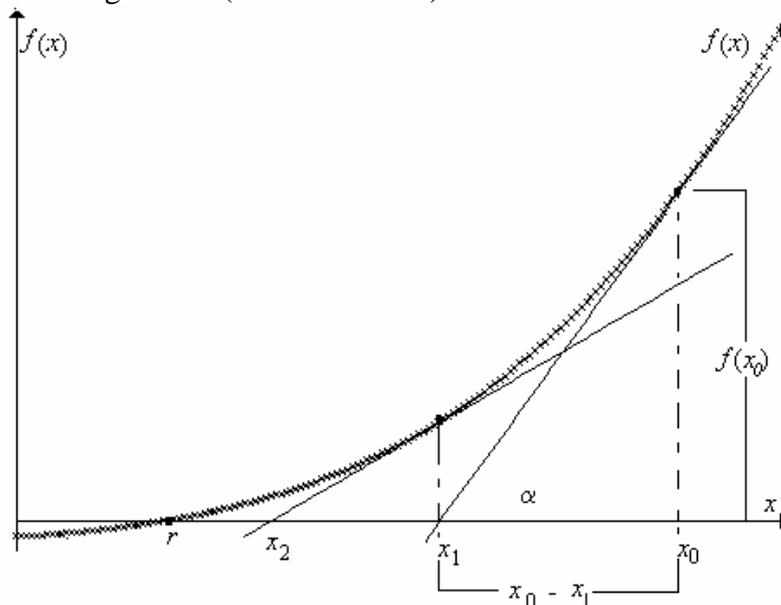
Así, $g(x) = \sqrt{13 - \frac{13}{x}} \wedge g'(x) = \frac{13/x^2}{2 \cdot \sqrt{13 - \frac{13}{x}}}$ ($x > 0$).

Si $x^{(0)} = 2 \Rightarrow g'(2) = 0.6374 \rightarrow |g'(2)| < 1$. Si $x = 3 \Rightarrow g'(3) = 0.2453 \rightarrow |g'(3)| < 1$.

El algoritmo es $x^{(n+1)} = \sqrt{13 - \frac{13}{x^{(n)}}}$. Converge para $2 < \alpha_3 < 3$.

Observación: para la construcción del algoritmo no es necesario separar las raíces previamente.

Ejemplo: iteración a partir del método de las tangentes (o de Newton) para el cálculo de los valores que verifican a una ecuación algebraica (o sea sus raíces).



$$tg \alpha = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow f'(x_0) \cdot (x_0 - x_1) = f(x_0) \Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ luego } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \dots, \text{ se construye el algoritmo:}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

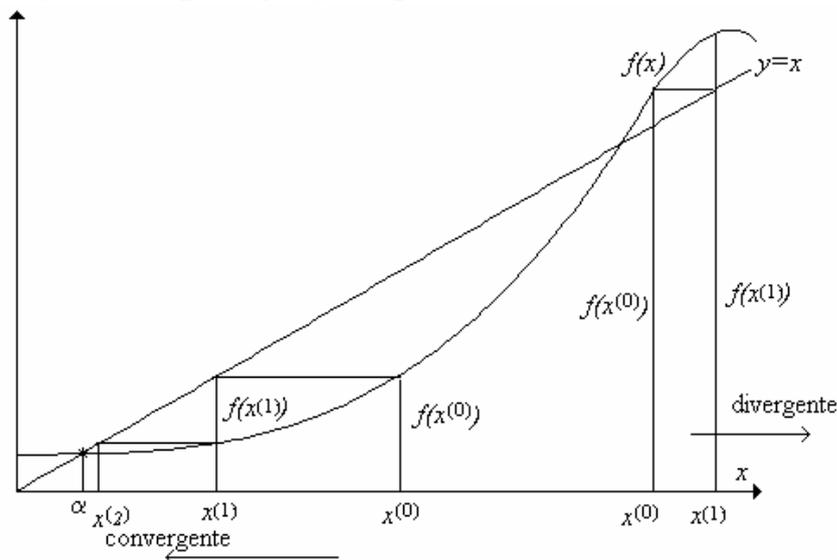
donde $|x - x^{(n+1)}| < |x - x^{(n)}| \Rightarrow \frac{|x - x^{(n+1)}|}{|x - x^{(n)}|} < 1$ (1)

Por ejemplo: si $f(x) = x \cos x - \text{sen } x + \frac{\pi}{2}$ con $x \in (0, \pi)$, el algoritmo es:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n)} \cos x^{(n)} - \text{sen } x^{(n)} + (\pi/2)}{-x^{(n)} \text{sen } x^{(n)}}$$

Respecto a la convergencia de la sucesión $\{x^{(k)}\} = \{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots\}$ tal que $x^{(k)} \rightarrow r$ (raíz de la ecuación) hay que tener cuidado que vaya cumpliéndose (1), porque puede ocurrir 2 alternativas diferentes, como es fácil de comprobar gráficamente.

Sea una función que podemos expresarla como: $x = f(x)$. Si tomamos $x = x_0$ como solución aproximada $\Rightarrow x_1 = f(x_0)$, luego $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, \dots , $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$.



la sucesión $\{x^{(k)}\}$ es convergente a α , α es la solución de la ecuación, $\alpha = f(\alpha)$

Una condición interesante para analizar al considerar el punto inicial $x^{(0)}$ es que $|f'(x^{(0)})| < 1$.

Por ejemplo: calcular la raíz $\alpha \in (0,1)$ de la ecuación $16x^3 - 27x + 12 = 0$.

Podemos modificarla como $16x = 16x^3 - 11x + 12 = 0$, y dividiendo por 16 queda:

$$x = x^3 - \frac{11}{16}x + \frac{3}{4}, \text{ construyendo el algoritmo } x^{(n+1)} = [x^{(n)}]^3 - \frac{11}{16}x^{(n)} + \frac{3}{4}$$

Consideramos dos soluciones iniciales: $x^{(0)} = 1$ y $x^{(0)} = 0.6$. Así, obtenemos

$x^{(n)}$	$x^{(0)} = 1$	$x^{(1)}=1.0625$	$x^{(2)}=1.219$	$x^{(3)}=1.7233$	$x^{(4)}=4.6831$
$x^{(n+1)}$	$x^{(1)}=1.0625$	$x^{(2)}=1.219$	$x^{(3)}=1.7233$	$x^{(4)}=4.6831$	$x^{(5)}=100.23$
diverge, el valor inicial elegido no sirve.					
$x^{(n)}$	$x^{(0)} = 0.6$	$x^{(1)}=0.5535$	$x^{(2)}=0.539$	$x^{(3)}=0.536$	$x^{(4)}=0.5355$
$x^{(n+1)}$	$x^{(1)}=0.5535$	$x^{(2)}=0.539$	$x^{(3)}=0.536$	$x^{(4)}=0.5355$	$x^{(5)}=0.5354$
converge a $\alpha = 0.535\dots$ con $\varepsilon < 10^{-3}$.					

Resolución de sistemas lineales

Ya es de conocimiento, los métodos clásicos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Entre ellos se supone ya elaborado los métodos de:

- a) Cramer o de los determinantes,
- b) utilización de la matriz inversa,
- c) Gauss o reducciones sucesivas,
- d) Gauss-Jordan.

Pero la incorporación de las computadoras, obligó a buscar una manera sistemática que conduzca a un algoritmo que pueda para ser computable para la resolución de estos sistemas.

Dentro de los métodos directos cabe hacer las siguientes objeciones al método más general que es el de eliminación gaussiana, antes de desarrollar un algoritmo de cálculo computable para la determinación de la solución aproximada del sistema.

- 1) En un conjunto grande de ecuaciones, los productos generados por las transformaciones elementales pueden superar los registros y proceder a su truncamiento (error de truncamiento).
- 2) Puede reducirse el error intercambiando las filas (en la matriz del sistema) hasta colocar como elemento $a_{1,1}$ el mayor en valor absoluto de los elementos de la primera columna.
- 3) Como $a_{1,1} \neq 0$, se divide por $a_{1,1}$ toda la ecuación y se obtiene el elemento unidad como pivote para reducir a ceros los restantes elementos de la columna.
- 4) Se sigue luego con los elementos diagonales de las otras columnas.
- 5) El error de redondeo se ve reducido al colocar los coeficientes mayores en valor absoluto en la diagonal principal.

Ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.333 & 0.667 & 4 \\ 0 & 2.333 & 2.333 & 7 \\ 0 & -1.333 & -2.333 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.333 & 0.667 & 4 \\ 0 & 2.333 & 2.333 & 7 \\ 0 & 0 & -2.333 & -4.667 \end{array} \right) \Rightarrow x_3 = 2.0004$$

se puede apreciar el error de redondeo, ya que la solución real del sistema es $\vec{x} = (3;1;2)$.

Descomposición LU (método de Doolittle ó Khaletsky)

Dentro de los nuevos métodos, el mencionado resulta ventajoso en sistemas de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$ donde $B \neq N$ (matriz nula), resultando el vector columna B variable, es decir sistemas lineales donde se requiere soluciones con diferente B . Tiene como desventaja, el que es menos eficiente que la eliminación gaussiana y más complicado en su resolución, además de estar limitado solamente a sistemas donde A sea una matriz cuadrada.

El método llamado LU (ya computable) consiste en la descomposición de la matriz A del sistema $A \cdot X = B$ en producto de dos matrices particulares, triangulares inferior y superior respectivamente. Ejemplificando en un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas, esto significa:

$$A = L \cdot U \quad \text{donde si } A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ se verifica que,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

L es triangular inferior con $l_{i,j} = 1$ si $i = j$ \wedge $l_{i,j} = 0$ si $i < j$.

U es triangular superior con $u_{i,j} = 0$ si $i > j$.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{1,1}l_{2,1} & u_{1,2}l_{2,1} + u_{2,2} & u_{1,3}l_{2,1} + u_{2,3} \\ u_{1,1}l_{3,1} & u_{1,2}l_{3,1} + u_{2,2}l_{3,2} & u_{1,3}l_{3,1} + u_{2,2}l_{3,2} + u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Con la descomposición, $A \cdot X = B \rightarrow L \cdot U \cdot X = B$.

Hacemos $Y = U \cdot X \rightarrow L \cdot Y = B$.

$$\text{Si } L \cdot Y = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_2 = b_2 - l_{2,1}y_1 \\ y_3 = b_3 - l_{3,1}y_1 - l_{3,2}y_2 \end{cases}$$

$$\text{y si } U \cdot X = Y \rightarrow \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{y_3}{u_{3,3}} \\ x_2 = \frac{y_2 - u_{2,3}x_3}{u_{2,2}} \\ x_1 = \frac{y_1 - u_{1,2}x_2 - u_{1,3}x_3}{u_{1,1}} \end{cases} \quad \text{si } u_{i,i} \neq 0$$

Ejemplo Resolver el sistema
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$A = L \cdot U \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{u_{1,1} = 3} \quad \boxed{u_{1,2} = 1} \quad \boxed{u_{1,3} = -1} \quad \boxed{u_{1,4} = 2} \\ l_{2,1}u_{1,1} = l_{2,1} \cdot 3 = -5 & \Rightarrow \boxed{l_{2,1} = -\frac{5}{3}}; \quad l_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} = 1 \Rightarrow -\frac{5}{3} + u_{2,2} = 1 \Rightarrow \boxed{u_{2,2} = \frac{8}{3}}; \\ l_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} = 3 & \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)(-1) + u_{2,3} = 3 \Rightarrow \boxed{u_{2,3} = \frac{4}{3}}; \quad l_{2,1}u_{1,4} + u_{2,4} = -4 \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 2 + u_{2,4} = -4 \Rightarrow \boxed{u_{2,4} = -\frac{2}{3}}; \\ l_{3,1}u_{1,1} = 2 & \Rightarrow l_{3,1} \cdot 3 = 2 \Rightarrow \boxed{l_{3,1} = \frac{2}{3}}; \quad l_{3,1}u_{1,2} + l_{3,2}u_{2,2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 1 + l_{3,2} \cdot \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{l_{3,2} = -\frac{1}{4}}; \\ l_{3,1}u_{1,3} + l_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} = 1 & \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} + u_{3,3} = 1 \Rightarrow \boxed{u_{3,3} = 2}; \quad l_{4,1}u_{1,1} = 1 \Rightarrow l_{4,1} \cdot 3 = 1 \Rightarrow \boxed{l_{4,1} = \frac{1}{3}} \\ l_{3,1}u_{1,4} + l_{3,2}u_{2,4} + u_{3,4} = -1 & \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + u_{3,4} = -1 \Rightarrow \boxed{u_{3,4} = -\frac{5}{2}}; \\ l_{4,1}u_{1,2} + l_{4,2}u_{2,2} = -5 & \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 + l_{4,2} \cdot \frac{8}{3} = -5 \Rightarrow \boxed{l_{4,2} = -2}; \\ l_{4,1}u_{1,3} + l_{4,2}u_{2,3} + l_{4,3}u_{3,3} = 3 & \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (-1) + (-2) \cdot \frac{4}{3} + l_{4,3} \cdot 2 = 3 \Rightarrow \boxed{l_{4,3} = 3}; \\ l_{4,1}u_{1,4} + l_{4,2}u_{2,4} + l_{4,3}u_{3,4} + u_{4,4} = -3 & \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 2 + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + u_{4,4} = -3 \Rightarrow \boxed{u_{4,4} = \frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Resulta entonces:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/4 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Como $U \cdot X = Y \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \text{(1)}$

$\wedge L \cdot Y = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/4 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -7/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$

reemplazando en (1) se determina que $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^t = (1 \ -1 \ 2 \ 3)^t$.

Métodos iterativos

En sustitución de los métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, se utilizan en forma corrientemente computada, los métodos iterativos teniendo la ventaja de facilitar los cálculos cuando la matriz es densa.

En general el proceso consiste en considerar una primera solución $X^{(0)}$ del sistema, la cual es aproximada y puede ser mejorada mediante una sucesión de vectores solución. Dicha sucesión:

$$\{X^{(0)}; X^{(1)}; X^{(2)}; X^{(3)}; \dots; X^{(k)}; \dots\},$$

si converge a la solución X es tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X$, entonces $X^{(k)}$ converge a X . El proceso es interrumpido cuando la solución obtenida $X^{(k)}$ alcanza la precisión deseada.

Estas técnicas iterativas involucran, en general un proceso que convierte al sistema $A \cdot X = B$ en un sistema equivalente

$$X^{(n+1)} = Z \cdot X^{(n)} + C \quad \text{donde } n \in \mathbf{N}_0.$$

Los términos de la sucesión $X^{(k)}$ se obtienen sucesivamente.

Tomando como primera aproximación de la solución del sistema a $X^{(0)}$ y utilizando el algoritmo de recurrencia $X^{(n+1)} = Z \cdot X^{(n)} + C$, se obtiene el término siguiente de la sucesión:

$$X^{(1)} = Z \cdot X^{(0)} + C$$

y así, en forma iterada,

$$X^{(2)} = Z \cdot X^{(1)} + C$$

$$X^{(3)} = Z \cdot X^{(2)} + C$$

$$\vdots$$

$$X^{(k)} = Z \cdot X^{(k-1)} + C.$$

Si la sucesión $\{X^{(k)}\}$ es convergente a X , se procede al truncamiento del proceso, utilizando alguna norma. Por ejemplo:

$$\|X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

donde $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ está prefijado.

Método iterativo de Jacobi

Para mejorar la interpretación del proceso y poder construir un algoritmo, comenzaremos con un ejemplo sencillo.

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}, \text{ en forma equivalente, } \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

Se comienza el proceso iterativo, resolviendo cada ecuación por medio de una sola de sus variables, eligiendo, en lo posible, aquellas que poseen mayor coeficiente en valor absoluto.

$$\begin{cases} 8x_1 = 8 - x_2 + x_3 \\ -7x_2 = -4 - x_1 - 2x_3 \\ 9x_3 = 12 - 2x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{7} + \frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_3 \\ x_3 = \frac{4}{3} - \frac{2}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

Como primer aproximación elegimos $X^{(0)} = (0; 0; 0)^t \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$.

Reemplazando en $\textcircled{1}$ tendremos $x_1 = 1 \wedge x_2 = 0.571 \wedge x_3 = 1.333 \Rightarrow X^{(1)} = (1; 0.571; 1.333)^t$.

Esta nueva solución, se reemplaza en $\textcircled{1}$, obteniendo:

$$x_1 = 1 - (0.125) \cdot (0.571) + (0.125) \cdot (1.333) = 1.095$$

$$x_2 = 0.571 + (0.143) \cdot 1 + (0.286) \cdot (1.333) = 1.095$$

$$x_3 = 1.333 - (0.222) \cdot 1 - (0.111) \cdot (0.571) = 1.043$$

$\Rightarrow X^{(2)} = (1.095; 1.095; 1.048)^t$, y así sucesivamente.

$X^{(k)}$	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$
x_1	0	1	1.095	0.995	0.993	1.002	1.001	1.000
x_2	0	0.571	1.095	1.026	0.990	0.998	1.001	1.000
x_3	0	1.333	1.048	0.969	1.000	1.004	1.001	1.000

La solución al sistema es $X = (1; 1; 1)^t$.

Consideremos otro sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, ya ordenado de manera tal que los mayores coeficientes en valor absoluto, constituyan elementos diagonales $a_{i,i}$.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

Simbolizando con $ec(1)$, $ec(2)$, $ec(3)$ y $ec(4)$ cada una de las ecuaciones del sistema, operamos en la siguiente forma:

$$\frac{ec(1)}{a_{1,1}} = \frac{ec(1)}{10} \Rightarrow x_1 = 0.1000x_2 - 0.2000x_3 + 0.6000$$

$$\frac{ec(2)}{a_{2,2}} = \frac{ec(2)}{11} \Rightarrow x_2 = 0.0909x_1 + 0.0909x_3 - 0.2727x_4 + 2.2727$$

$$\frac{ec(3)}{a_{3,3}} = \frac{ec(3)}{10} \Rightarrow x_3 = -0.2000x_1 + 0.1000x_2 + 0.1000x_4 - 1.1000$$

$$\frac{ec(4)}{a_{4,4}} = \frac{ec(4)}{8} \Rightarrow x_4 = -0.3750x_2 + 0.1250x_3 + 1.8750$$

concluyendo que $\begin{cases} x_1 = 0.1000x_2 - 0.2000x_3 + 0.6000 \\ x_2 = 0.0909x_1 + 0.0909x_3 - 0.2727x_4 + 2.2727 \\ x_3 = -0.2000x_1 + 0.1000x_2 + 0.1000x_4 - 1.1000 \\ x_4 = -0.3750x_2 + 0.1250x_3 + 1.8750 \end{cases}$ Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.1000 & -0.2000 & 0.0000 \\ 0.0909 & 0.0000 & 0.0909 & -0.2727 \\ -0.2000 & 0.1000 & 0.0000 & 0.1000 \\ 0.0000 & -0.3750 & 0.1250 & 0.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6000 \\ 2.2727 \\ -1.1000 \\ 1.8750 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^{(n+1)} & & Z & & X^{(n)} & & C \end{matrix}$$

quedando el algoritmo:

$$\boxed{X^{(n+1)} = Z \cdot X^{(n)} + C \quad \forall n \in \mathbb{N}_0}$$

Tomando como primera aproximación $X^{(0)} = (x_1; x_2; x_3; x_4)^t = (0; 0; 0; 0)^t$, se obtiene:

$$X^{(1)} = C = (0.6000; 2.2727; -1.1000; 1.8750)^t$$

$$X^{(2)} = (1.0473; 1.7159; -0.8052; 0.8852)^t$$

$$X^{(3)} = (0.9326; 2.0533; -1.0493; 1.1309)^t$$

⋮

Escribimos en la próxima tabla los resultados, agregando una columna con la máxima diferencia de cada una de las variables, esto es la norma infinita, para proceder al truncamiento. Puede observarse que después de 10 determinaciones tendemos:

$$\|x_j^{(10)} - x_j^{(9)}\|_{\infty} = 1.0006 - 0.9998 = 8.0 \times 10^{-4} \text{ correspondiente a } j = 4.$$

El error relativo es $\frac{\|x_j^{(10)} - x_j^{(9)}\|_{\infty}}{\|x_j^{(10)}\|_{\infty}} = \frac{0.0008}{0.9998} < 10^{-3}$.

Aclaremos que la solución exacta es $X = (1; 2; -1; 1)^t$. Esto quiere decir que $\|x_j^{(10)} - x_j\| = 0.0002 < 10^{-3}$.

	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$X_4^{(k)}$	$\ X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}\ _\infty$
$X^{(0)}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-----
$X^{(1)}$	0.6000	2.2727	-1.1000	1.8750	2.2727
$X^{(2)}$	1.0473	1.7159	-0.8052	0.8852	0.9898
$X^{(3)}$	0.9326	2.0533	-1.0493	1.1309	0.3374
$X^{(4)}$	1.0152	1.9537	-0.9681	0.9738	0.1570
$X^{(5)}$	0.9890	2.0114	-1.0103	1.0213	0.0577
$X^{(6)}$	1.0032	1.9922	-0.9945	0.9944	0.0269
$X^{(7)}$	0.9981	2.0023	-1.0020	1.0036	0.0101
$X^{(8)}$	1.0006	1.9987	-0.9990	0.9989	0.0047
$X^{(9)}$	0.9997	2.0004	-1.0004	1.0006	0.0018
$X^{(10)}$	1.0001	1.9998	-0.9998	0.9998	0.0008

Condiciones suficientes para la convergencia

Sea una sucesión de vectores solución $\{X^{(k)}\} = \{X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, \dots\}$, generada a partir del algoritmo iterativo $X^{(k)} = Z \cdot X^{(k-1)} + C$ con $k = 1, 2, 3, \dots$ y con alguna norma matricial $\|Z\| < 1$, entonces dicha sucesión converge a la única solución $X = Z \cdot X + C$ cualquiera sea el vector inicial $X^{(0)}$ elegido.

Demostración. Como $X^{(k)} = Z \cdot X^{(k-1)} + C$ entonces si X es solución del sistema resulta

$$\begin{aligned} X - X^{(k)} &= (Z \cdot X + C) - (Z \cdot X^{(k-1)} + C) = Z \cdot (X - X^{(k-1)}) = Z \cdot \{X - [Z \cdot X^{(k-2)} + C]\} = \\ &= Z \cdot \{(Z \cdot X + C) - (Z \cdot X^{(k-2)} + C)\} = Z^2 \cdot (X - X^{(k-2)}) = \dots = Z^k \cdot (X - X^{(0)}) \\ &\Rightarrow \boxed{X - X^{(k)} = Z^k \cdot (X - X^{(0)})} \end{aligned}$$

Calculando $\|X - X^{(k)}\| = \|Z^k \cdot (X - X^{(0)})\| \leq \|Z^k\| \cdot \|X - X^{(0)}\|$ siendo $k > 1$.

Como por hipótesis $\|Z\| < 1 \Rightarrow \|Z^k\| = \|Z\|^k < 1 \Rightarrow \|X - X^{(k)}\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, quedando probada la convergencia.

Ejemplo: sea el sistema $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$. A partir del mismo obtenemos que $\begin{cases} x_1 = 0.200x_2 + 0.600 \\ x_2 = -0.333x_1 + 2.333 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.200 \\ -0.333 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.600 \\ 2.333 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $X \qquad \qquad \qquad Z \qquad \qquad \qquad X \qquad \qquad \qquad C$

Analizando la norma de Z , tanto la de fila como la de columna, resulta $\|Z\| < 1 \Rightarrow$ se puede analizar el algoritmo $X^{(k+1)} = Z \cdot X^{(k)} + C$ a partir de $X^{(0)} = (0; 0)^t$.

Algoritmo para la iteración de Jacobi

Se busca, dado un sistema de ecuaciones lineales, en primer lugar, que los elementos diagonales sean -en valor absoluto- tan grandes como sea posible, en comparación con los otros coeficientes de la misma fila. En esta etapa del proceso se puede intercambiar filas entre si.

Comenzando con una solución inicial $X^{(0)}$, se calcula cada componente de la solución siguiente $x_i^{(n+1)}$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$, de la siguiente forma:

$$\boxed{x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N; \text{ con } a_{i,i} \neq 0}$$

Condición suficiente para la convergencia: $\boxed{|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N |a_{i,j}| \quad i = 1, 2, \dots, N}$.

En ese caso $X^{(n)}$ converge a la solución y lo hace rápidamente, cualquiera sea el vector inicial.

Método iterativo de Gauss-Seidel

En el proceso de Jacobi, cada variable obtenida $x_i^{(k)}$ recién es utilizada para los siguientes cálculos, luego de cumplido el ciclo de iteración. Este proceso puede mejorarse si las variables fueran utilizadas en forma inmediata en el cálculo de la siguiente variable, sin esperar la terminación del ciclo. Esta variación, que permite una mayor rapidez de convergencia, se conoce como método iterativo de Gauss-Seidel.

Por ejemplo, en el primer sistema resuelto por el método de Jacobi,

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2 \end{cases},$$

puede estimarse el siguiente orden secuencial

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 1 - 0.125x_2^{(n)} + 0.125x_3^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} = 0.571 + 0.143x_1^{(n+1)} + 0.286x_3^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} = 1.333 - 0.222x_1^{(n+1)} - 0.111x_2^{(n+1)} \end{cases}.$$

n	0	1	2	3	4	5	...
x_1	0	1.000	1.041	0.997	1.001	1.000	...
x_2	0	0.714	1.014	0.996	1.000	1.000	...
x_3	0	1.032	0.990	1.002	1.000	1.000	...

Comenzando con $X^{(0)} = (0;0;0)$,

$$x_1^{(1)} = 1 - 0.125 \cdot 0 + 0.125 \cdot 0 = 1$$

$$x_2^{(1)} = 0.571 + 0.143 \cdot 1 + 0.286 \cdot 0 = 0.714$$

$$x_3^{(1)} = 1.333 - 0.222 \cdot 1 - 0.111 \cdot 0.714 = 1.032$$

$$x_1^{(2)} = 1 - 0.125 \cdot 0.714 + 0.125 \cdot 1.032 = 1.041$$

$$x_2^{(2)} = 0.571 + 0.143 \cdot 1.041 + 0.286 \cdot 1.032 = 1.014$$

$$x_3^{(2)} = 1.333 - 0.222 \cdot 1.041 - 0.111 \cdot 1.014 = 0.990$$

y así continúa. Se ve en forma evidente que converge a X con mayor rapidez que con el método anterior.

El algoritmo correspondiente a cada una de las variables x_i , con $a_{i,i} \neq 0$ es:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N; \text{ con } a_{i,i} \neq 0$$

Condición para la convergencia: $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N |a_{i,j}| \quad i = 1, 2, \dots, N.$

Cuando esto se cumpla, $X^{(n)}$ será convergente a la solución sin importar cual sea el vector inicial $X^{(0)}$ que se utilice.

Una alternativa en la transformación del sistema $A \cdot X = B$ en el proceso iterativo de

$$X^{(k)} = Z \cdot X^{(k-1)} + C$$

es aquella mediante la cual la matriz A del sistema se descompone en la suma algebraica de una matriz diagonal, una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior. Exige como condición que los elementos de la diagonal de la matriz cuadrada A sean no nulos, $a_{i,i} \neq 0$.

Recordemos que para una dada una matriz diagonal se verifica que:

$$\text{si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \text{ entonces } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Así, la obtención de esta matriz inversa es muy simple.

Volviendo ahora a considerar la descomposición de A , planteamos que $A = D - L - U$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & -a_{n,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $D \qquad \qquad L \qquad \qquad U$

Reemplazando, $A \cdot X = B$ se transforma en $(D - L - U) \cdot X = B \Rightarrow D \cdot X = (L + U) \cdot X + B \Rightarrow$ como $\exists D^{-1}$,
 $X = D^{-1} \cdot (L + U) \cdot X + D^{-1} \cdot B$.

El proceso iterativo se desarrolla por el algoritmo:

$$\boxed{X^{(k)} = D^{-1} \cdot (L + U) \cdot X^{(k-1)} + D^{-1} \cdot B \quad \text{con } a_{i,i} \neq 0 \quad \forall i.}$$

Es aconsejable el reordenamiento de las ecuaciones con la finalidad de que los $a_{i,i}$ sean -en valor absoluto- lo más grande posible para acelerar la convergencia de $X^{(k)} \rightarrow X$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como criterios de interrupción del proceso iterativo pueden utilizarse:

$$\frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|X^{(k)}\|_{\infty}} < \varepsilon_1 \quad \text{ó} \quad \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_{\infty} < \varepsilon_2,$$

recordando que si $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \wedge X^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ entonces

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_{\infty} = \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Método de Relajación (Southwell)

A efectos informativos, hay un modelo iterativo que se utiliza con ventajas en cálculos manuales - a la fecha no está bien adaptado a su implementación en la computadora. Conduce a una técnica de aceleración importante llamada sobre-relajación.

Dado, por ejemplo, el sistema $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$, se comienza, nuevamente, a reordenar las

ecuaciones, pero en forma diferente a los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, aunque respeta el mayor valor para los elementos diagonales.

$$\begin{cases} -8x_1 - x_2 + x_3 + 8 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 9x_3 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 + 1.000 = 0 \\ 0.143x_1 - x_2 + 0.286x_3 + 0.571 = 0 \\ -0.222x_1 - 0.111x_2 - x_3 + 1.333 = 0 \end{cases}$$

Si se fija una solución aproximada y se reemplaza en el sistema, las ecuaciones no quedarán satisfechas.

Así, si elegimos a $X^{(0)} = (0, 0, 0)$ como solución aproximada, tendremos los primeros valores

$$R_1 = 1.000; R_2 = 0.571 \wedge R_3 = 1.333$$

donde: $R_1 = -x_1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 + 1.000; R_2 = 0.143x_1 - x_2 + 0.286x_3 + 0.571 \wedge$

$$R_3 = -0.222x_1 - 0.111x_2 - x_3 + 1.333.$$

Los valores de error absoluto, toman el nombre de residuo R_i .

El máximo valor de R_i en valor absoluto, en este caso $|\max(R_1, R_2, R_3)| = 1.333$, nos dice que la tercer ecuación debe ser mejorada. Se procede a modificar x_3 para relajar R_3 (el residuo mayor); y así se continuará en forma sucesiva con el proceso hasta que $R_i \rightarrow 0$.

Es decir que si la solución aproximada:

$$X^{(0)} = (0; 0; 0) \rightarrow R^{(0)} = (1.000; 0.571; 1.333).$$

Como $|\max R_i^{(0)}| = 1.333$

$$X^{(1)} = (0; 0; 1.333) \rightarrow R^{(1)} = (1.167; 0.952; 0).$$

Como $|\max R_i^{(1)}| = 1.167$, debemos mejorar la primer ecuación

$$X^{(2)} = (1.167; 0; 1.333) \rightarrow R^{(2)} = (0; 1.119; -0.259).$$

Como $|\max R_i^{(2)}| = 1.119$, debemos mejorar la segunda ecuación

$$X^{(3)} = (1.167; 1.119; 1.333) \rightarrow R^{(3)} = (-0.140; 0; -0.383).$$

Como $|\max R_i^{(3)}| = 0.383$, debemos mejorar la tercer ecuación

$$X^{(4)} = (1.167; 1.119; -0.383) \rightarrow R^{(4)} = (-0.189; -0.109; 0),$$

y así sucesivamente hasta que $|R_i| < \varepsilon$ (prefijado).

Ejercicios a resolver

Ejercicio 1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3, \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \end{cases}$$

resolverlo, aplicando un proceso iterativo (Jacobi o Gauss-Seidel) y, sabiendo que la solución exacta es $X^t = (x_1, x_2, x_3) = (3; -2.5; 7)$ determinar los errores sucesivos que se van produciendo en cada paso del proceso iterativo, e interrumpir el proceso cuando $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_\infty < 0.01$.

Ejercicio 2

Resolver mediante algún proceso iterativo los siguientes sistemas lineales, fijando previamente una cota de error para el resultado aproximado.

$$2.a) \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \quad 2.b) \begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9 \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7 \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4 \end{cases} \quad 2.c) \begin{cases} 9.9x_1 - 1.5x_2 + 2.6x_3 = 0 \\ 0.4x_1 + 13.6x_2 - 4.2x_3 = 8.2 \\ 0.7x_1 + 0.4x_2 + 7.1x_3 = -1.3 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Resolver por el método de Jacobi el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \end{cases}$$

por medio de cinco ciclos del proceso iterativo y evaluar que se comete con el resultado aproximado.

Ejercicio 4

Los sistemas de ecuaciones lineales cuyas soluciones son muy sensibles a pequeños cambios de los coeficientes del sistema, se llaman sistemas inestables o mal condicionados. Determinar las soluciones para los sistemas *aparentemente equivalentes* que se dan a continuación, donde se han introducidos pequeñas modificaciones en los coeficientes. Comparar las soluciones obtenidas.

$$\begin{array}{l}
\mathbf{4.a) \text{ Sistema I}} \quad \begin{cases} 1.000x_1 + 1.000x_2 = 1.000 \\ 1.000x_1 + 1.025x_2 = 6.000 \end{cases} \text{ (con tres cifras decimales exactas)} \\
\text{Sistema II} \quad \begin{cases} 1.00x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.03x_2 = 6.00 \end{cases} \text{ (con dos cifras decimales exactas).} \\
\mathbf{4.b) \text{ Sistema I}} \quad \begin{cases} 1.000x_1 + 1.030x_2 = 4.000 \\ 1.000x_1 + 1.025x_2 = 4.000 \end{cases}; \quad \text{Sistema II} \quad \begin{cases} 1.000x_1 + 1.030x_2 = 4.000 \\ 1.000x_1 + 1.025x_2 = 4.005 \end{cases} \\
\text{Sistema III} \quad \begin{cases} 1.00x_1 + 1.03x_2 = 4.00 \\ 1.00x_1 + 1.03x_2 = 4.00 \end{cases}; \quad \text{Sistema IV} \quad \begin{cases} 1.00x_1 + 1.03x_2 = 4.00 \\ 1.00x_1 + 1.03x_2 = 4.01 \end{cases}
\end{array}$$

Nota. La estabilidad de los sistemas de ecuaciones lineales se mide con lo que se denomina condición de A (siendo A la matriz de los coeficientes del sistema, debiendo ser invertible) que se simboliza con $cond(A)$ y se calcula a partir de alguna norma asociada a la matriz en la siguiente forma:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Es de esperar que la matriz A tenga un buen comportamiento, es decir que esté bien condicionado el sistema correspondiente, cuando $cond(A)$ tenga un valor próximo a 1 y, tenga un comportamiento defectuoso o inestable cuando $cond(A)$ tenga valores lejanos a 1.

La solución más obvia para mejorar los efectos debidos al mal acondicionamiento, es el de usar mayor número de cifras significativas en los coeficientes y términos independientes del sistema lineal.

Ejercicio 5

Probar que si el siguiente sistema está mal condicionado, $\begin{cases} 1.01x_1 + 0.99x_2 = 2.00 \\ 0.99x_1 + 1.01x_2 = 2.00 \end{cases}$.

Ejercicio 6

Dado el sistema $A \cdot X = B$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

6.a) resolverlo aplicando algún proceso iterativo.

6.b) ¿Cómo incide en la solución si $B' = (32.1; 22.9; 32.9; 31.1)$ ó $B' = (32.01; 22.99; 32.99; 31.01)$?