INTRODUCCION A LA PROGRAMACION LINEAL

En toda empresa es común plantearse la necesidad de maximizar las utilidades y de minimizar los costos, debiendo analizar todos los procesos y representarlos por medio de modelos algebraicos que se ajusten a los requerimientos y las restricciones del sistema.

Las restricciones que se presentan en las variables reales a evaluar, pueden ser del tipo de: disponibilidades de recursos materiales y humanos, de limitación de capacidades, de límites financieros, etc…. Algunas de ellas son muy evidentes, como ser: no podemos pensar una producción negativa o infinita, ni tampoco que pueda satisfacerse una demanda infinita, o que pueda almacenarse sin límite la producción.

El análisis de la programación lineal se reduce a plantear una funcional que contemple las variables reales relacionadas con sus índices de costos, a la cual debe buscarse su optimización (maximizar o minimizar una función) y donde las variables están sujetas a restricciones, que en el modelo matemático, están representadas por inecuaciones lineales.

Dentro de los procesos de programación de sistemas lineales se encuentran el método gráfico (muy limitado), el cual se mejora con el polígono convexo y más general por proceso algebraicos, como el método simplex.

PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema de programación lineal se reduce a encontrar un vector

$$\overline{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n) \in \mathbf{R^n}$$

que maximice una función objetivo:

$$f_{(\bar{x})} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

y que satisfaga las siguientes m desigualdades lineales (desigualdades restrictivas)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n \le b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n \le b_3 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n \le b_m \end{cases}$$

donde $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0; \cdots \to x_i \ge 0 \; \forall i = 1,2,3,\cdots,n$

El método gráfico puede aplicarse únicamente en el caso limitado a dos variables, donde se obtienen los infinitos puntos que satisfacen al sistema, de los cuales se elige el que optimiza la funcional. Como la región obtenida consiste en un polígono convexo, se puede demostrar que los puntos óptimos se encuentran en los vértices de la figura.

En el método simplex, de aplicación más general y de resolución analítica, se eliminan las desigualdades lineales transformándolas en ecuaciones lineales mediante la introducción de variables **SLACK** o **LAX** (de holgura), no negativas, simbolizadas por

$$s_i, \forall i = 1,2,3,\cdots,m$$

En ese caso:

$$f_{(\bar{x})} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + \cdots + 0 \cdot s_m$$

de tal manera que no incidan en la función objetivo, sujeta al siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n + s_1 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n + s_2 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n + s_3 = b_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n + s_m = b_m \end{cases}$$

donde $s_i \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3,\cdots,m \quad \wedge \quad x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,3,\cdots,n$

Las variables SLACK incorporadas al sistema integran la primera solución básica factible del mismo, la cual se mejora con un proceso iterativo por cambio de variable de la solución. En forma esquemática

x_1	x_2	x_3	...	x_n	s_1	s_2	s_3	...	s_n	b_i
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	...	$a_{1,n}$	1	0	0	...	0	b_1
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	...	$a_{2,n}$	0	1	0	...	0	b_2
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	...	$a_{3,n}$	0	0	1	...	0	b_3
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$a_{m,3}$	...	$a_{m,n}$	0	0	0	...	1	b_m
c_1	c_2	c_3	...	c_n	**0**	**0**	**0**	...	**0**	f

Antes de entrar en el método simplex, conviene interpretar varios problemas, para simplificar luego el planteo de los mismos.

PROBLEMA Nro 1

En un lago hay dos tipos de especies de peces, identificadas con I y II . El peso promedio de cada especie es de 4 libras. y 2 lbs., respectivamente. Se dispone de dos tipos de alimentos, A1 y A2. Las necesidades diarias de subsistencia de las especies son: la de I, 1 unidad de A1 y 3 unidades de A2; la de II, 2 unidades de A1 y 1 unidad de A2. Se cuenta con disponibilidades de 500 unidades de A1 y 900 unidades de A2 por día. ¿Cuál debe ser la población de cada clase para maximizar el peso del pescado que pueda producirse en el criadero?

Si consideramos que

x_1 es la cantidad de peces de la especie I y x_2 es la cantidad de peces de la especie II,

la función a maximizar debe representar el peso total, es decir

$$f = 4x_1 + 2x_2$$

donde hemos eliminado las unidades de peso para simplificar la expresión.

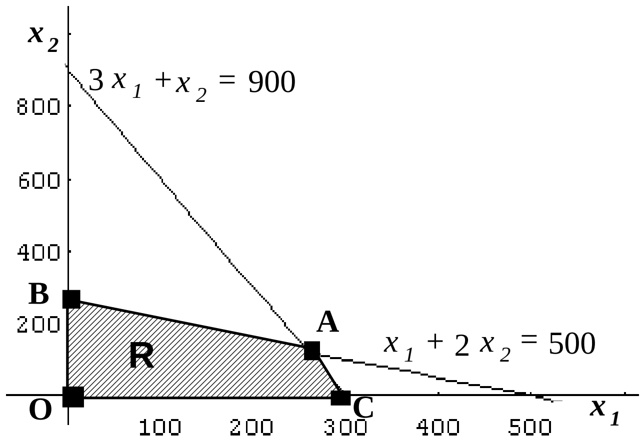
La matriz de unidades alimentarias es:

	Especie I	**Especie II**	**Disponibilidad diaria**
Alimento A1	1	2	500
Alimento A2	3	1	900

Las inecuaciones de restricción son:

$$\begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 \le 500 \\ 3\,x_1 + x_2 \le 900 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

La representación gráfica del problema permite hallar el conjunto de soluciones del sistema, dado por la región R sombreada en el siguiente gráfico, que corresponde a los puntos que satisfacen todas las inecuaciones simultáneamente.



El análisis se reduce ahora a hallar el valor de la funcional en los vértices de la región. Dichos vértices están dados por la intersección de dos rectas según el siguiente detalle:

Vértice O: $x_1 = 0 \quad \text{I} \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{O} = (0,0)$
Vértice B: $x_1 = 0 \quad \text{I} \quad x_1 + 2x_2 = 500 \quad \Rightarrow \quad \text{B} = (0,250)$
Vértice C: $x_2 = 0 \quad \text{I} \quad 3x_1 + x_2 = 900 \quad \Rightarrow \quad \text{C} = (300,0)$
Vértice A: $x_1 + 2x_2 = 500 \quad \text{I} \quad 3x_1 + x_2 = 900 \quad \Rightarrow \quad \text{A} = (260,120)$

Observación: eliminamos trivialmente el origen O pues corresponde a no tener ningún pez.

Vértice	Factibilidad del	Funcional
B (0, 250)	si	f(B) = 4·0+2·250; f(B) = 500
C (300, 0)	si	f(C) = 3·300+2·0; f(C) = 1200
A (260, 120)	si	f(A) = 4·280+2·120; f(A) = 1280

Observamos que el valor máximo corrspondiente a la funcional en la región R es f(A) = 1280.
Concluimos con ello que la :

<u>**Solución óptima**</u> corresponde a: **Máximo** $f\,(x_1, x_2) = f\ (260,120) = 1280$

<u>Rta. al problema</u>: para optimizar el peso, la población debe estar constituida por 260 peces de la especie I y 120 peces de la especie II.

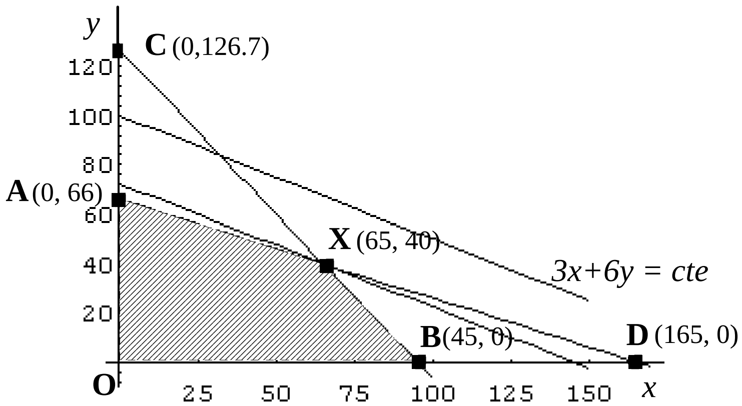
PROBLEMA Nro. 2

Una mueblería fabrica sillas y mesas de comedor. Cada silla insume 20 cuft (pies cúbicos) de madera y 4 horas/hombre de trabajo; los insumos de materiales y horas/hombre por cada mesa son 50 cuft y 3 hs/hombre. El fabricante dispone en stock de 3300 cuft de madera y 380 hs/hombre de capacidad laboral. Las utilidades resultan de 3 $/silla y 6$/mesa vendidas. Se supone que se disponen de todos los materiales secundarios necesarios para la fabricación en cantidades suficientes a la demanda. ¿Cuantas sillas y mesas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se venda todo lo producido?.

Disponibilidades	$/Silla	$/Mesa	Total
Madera cuft	20	50	3300
Hs/Hombre	4	3	380
Utilidades	3	6	Max(*f*)

Si x es el número de sillas producidas y y el de mesas, entonces se plantea el siguiente sistema de inecuaciones y la función objetivo $f(x, y)$ a <u>maximizar</u>:

$$\begin{cases} 20\,x + 50\,y \le 3300 \\ 4\,x + 3\,y \le 380 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad \boxed{f(x, y) = 3\,x + 6\,y}$$



Analizamos los puntos críticos del polígono OAXB, evaluando la funcional en ellos para obtener el óptimo:

Vértice	Coordenadas	Verifica el sistema	Funcional
X	(65, 40)	si	*f*(X) = 435 **Máximo**
A	(0, 66)	si	*f*(A) = 396
B	(95, 0)	si	*f*(B) = 195
O	(0, 0)	si	*f*(O) = 0
D	(165, 0)	no cumple con: $4x + 3y \le 380$	-------
C	(0, 126.7)	no cumple con: $20x + 50y \le 3300$	-------

Máximo $f(x, y) = f(65, 40) = 435$

<u>Rta. al problema</u>: se deben fabricar 65 sillas y 40 mesas para optimizar las utilidades.

PROBLEMA Nro. 3

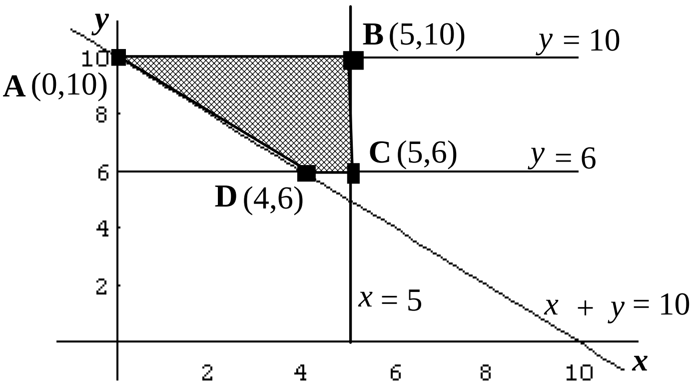
El director de servicio de agua potable tiene que abastecer como mínimo un consumo diario de 10 megal. (10 millones de litros). El suministro proviene de un depósito local que resulta insuficiente; el restante es provisto por cañerías de una localidad vecina. El depósito local tiene un rendimiento diario de 5 megal. como máximo. La máxima cantidad de agua con la que se abastece por tuberías no puede superar los 10 megal. por problemas de dimensiones. Además por contrato se garantiza un consumo mínimo de 6 megal. por bombeo. Los costos son de 300 $/megal. en el depósito local y de 500 $/megal. el provisto desde la localidad vecina. ¿Cómo podría el director minimizar los costos de suministro diario de agua?.

Si x es la cantidad de megalitros de agua abastecida desde el depósito local y con y indicamos la cantidad de megal. de agua suplementaria provista por cañería. La ecuación "funcional" de costo es:

$\boxed{C(x,y) = 300\,x + 500\,y}$ funcional a minimizar

Para satisfacer la demanda se plantean las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 10 & \Rightarrow \text{ satisfacer la demanda} \\ x \leq 5 & \Rightarrow \text{ el depósito povee como Max.} \\ y \leq 10 & \Rightarrow \text{ la tubería provee como Max.} \\ y \geq 6 & \Rightarrow \text{ garantía de contrato min.} \\ x \geq 0 & \Rightarrow \text{ solución no negativa} \\ y \geq 0 & \Rightarrow \text{ solución no negativa} \end{cases}$$



Vértice	Coordenadas	cumple c/inecuaciones	Funcional
A	(0, 10)	si	C = 500 ·10 = 5000
B	(5, 10)	si	C = 300 · 5 + 500 ·10 = 6500 máximo
C	(5, 6)	si	C = 300 · 5 + 500 · 6 = 4500
D	(4, 6)	si	C = 300 · 4 + 500 · 6 = 4200 mínimo

mínimo $C(x, y) = C(4, 6) = 4200$

Rta. al problema: la cantidad de agua provista por el depósito central debiera ser de 4 megal. por día y la cantidad de agua adquirida de ciudad vecina de 6 megal. por día para minimizar los costos.

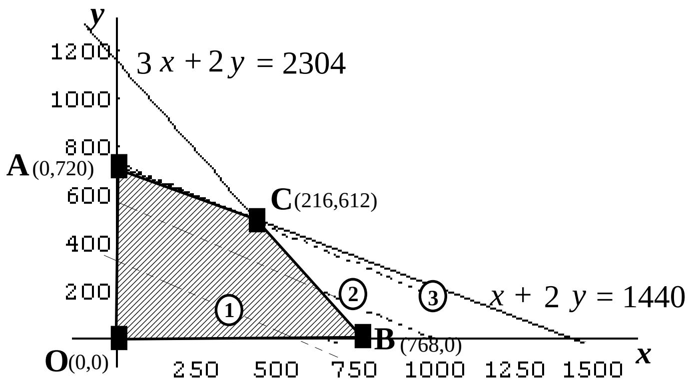
PROBLEMA Nro. 4

Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, que están fraccionados en barras de 4 unidades de peso (up.) cada una. La materia prima para su fabricación es caramelo y chocolate. La variedad de dulce A contiene 3 up. de caramelo y 1 up. de chocolate por barra. La variedad de dulce B contiene 2 up. de caramelo y 2 up. de chocolate por barra. Las disponibilidades de stock son de 1440 up. de chocolate y 2304 up. de caramelo.
¿Cuántas barras deberán producirse de cada tipo para maximizar los ingresos si la variedad A se vende a 30 $/barra y la B a 54 $/barra?. Se supone que se vende el total de lo producido.

Sea *x* la cantidad de barras producidas de la variedad A y *y* la cantidad de la variedad B.
La función objetivo a maximizar es: $\boxed{f(x,y) = 30x + 54y}$

	Variedad A	Variedad B	Disponibilidad máxima
Caramelo	3 up./barra	2 up./barra	2304 up.
Chocolate	1 up./barra	2 up./barra	1440 up.
Precio de Venta	30 $/barra	54 $/barra	Max *f*

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 2304 \\ x + 2y \le 1440 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



En el gráfico hemos marcado con ①, ② y ③ tres rectas paralelas pertenecientes a la familia de infinitas rectas definida por *f* = cte., es decir: 30 *x* + 54 *y* = cte.

Vértice	Coordenadas	Verifica las inec.	Funcional
A	(0, 720)	si	*f* = 30(0)+54(720) = 38880
B	(768, 0)	si	*f* = 30(768)+54(0) = 23040
C	(216, 612)	si	*f* = 30(216)+54(612) = 39528 **Max**

Máximo f(x,y) = f(216, 612) = 39528

<u>Rta. al problema</u>**:** se maximizan los ingresos produciendo 216 barras del dulce A y 612 del dulce B.

PROBLEMA Nro. 5

Dos alimentos consisten básicamente en carbohidratos y proteínas. El alimento I cuesta 50 \$/kgr. y contiene 90 % de carbohidratos, el 10 % restante de proteínas. El alimento II cuesta 100 \$/kgr. y contiene 60 % de carbohidratos, el 40% restante de proteínas.

¿Qué cantidad de cada uno de estos alimentos proporciona al menos 2 kgr. de carbohidratos y 1 kgr. de proteínas a un costo mínimo?. ¿Cuál es el costo por kgr. de la dieta ?

Sea x, la cantidad de kgr. de alimento I, y la cantidad de kgr. de alimento II.
La función objetivo a minimizar es: $\boxed{C(x,y) = 50x + 100y}$

El problema se puede esquematizar de la siguiente forma:

	Alimento I	**Alimento II**	**Mínimo**
Carbohidratos	0,9	0,6	2
Proteínas	0,1	0,4	1
Costo	50	100	min (C)

El conjunto de restricciones está dado por:

$$\begin{cases} 0{,}9\,x + 0{,}6\,y \geq 2 \\ 0{,}1\,x + 0{,}4\,y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Queda así planteado el ejercicio para su resolución.

PROBLEMA Nro. 6

Una planta de destilación de petróleo trabaja utilizando dos tipos de crudos de petróleo diferentes. Para la destilación se usan dos mezclas de los crudos (a y b) en las proporciones detalladas en la siguiente tabla (1):

Petróleo	**Mezcla I**	**Mezcla II**	**Disponibilidades [m^3/30 días]**
Crudo a	20 %	50 %	90000
Crudo b	80 %	50 %	120000

Las disponibildades del stock son las indicadas.
La demanda del mercado esta comprometida como mínimo de:

Nafta 75000 m^3/mes y Gasoil 60000 m^3/mes.

Los beneficios que se obtienen por las ventas son de:

300000 \$ /m^3 de la mezcla I y 20000 \$ /m^3 de la mezcla II.

Los rendimientos de la destilación de las mezclas I y II son las detalladas en la sig. tabla (2):

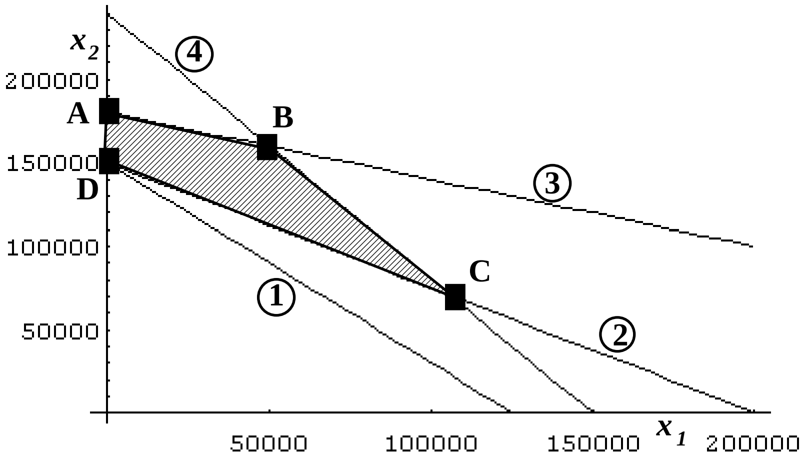
Combustible	**Mezcla I**	**Mezcla II**	**Demanda mínima**
Nafta	0,6	0,5	75000
Gasoil	0,3	0,4	60000

Calcular el máximo beneficio que puede obtenerse al efectuarse el destilado de las mezclas I y II.

Sea x_1 la cantidad de m^3 que se destila de la mezcla I y x_2 la cantidad de m^3 que se destila de la mezcla II. Las inecuaciones de restricción son:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0.6x_1 + 0.5x_2 \geq 75000 \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 \geq 60000 \end{array}\right\} \text{de la tabla (1)} \\ \left.\begin{array}{l} 0.2x_1 + 0.5x_2 \leq 90000 \\ 0.8x_1 + 0.5x_2 \leq 120000 \end{array}\right\} \text{de la tabla (2)} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{variables no negativas} \end{cases}$$

funcional a <u>maximizar</u>: $\boxed{f(x_1, x_2) = 30000x_1 + 20000x_2}$



Las cuatro rectas numeradas son las ecuaciones correspondientes al sistema de restricciones, por orden de secuencia.

Vértice	**Funcional**
A (0, 180000)	*f*(A) = 0+1800000·20000 = 3600000000
B (50000, 160000)	*f*(B) = 50000·30000+160000·20000 = 4700000000 **Max**
C (106000, 70600)	*f*(C) = 106000·30000 + 70600·20000 = 4592000000
D (0, 150000)	*f*(D) = 0+150000·20000 = 3000000000

El máximo beneficio que se obtiene es de 4700 millones de $. Para obtener dicho beneficio será necesario destilar 50000 m^3/mes de la mezcla I y 160000 m^3/mes de la mezcla II. Destilando las cantidades antes citadas de crudo de petróleo se habrán comercializado, mensualmente, el siguiente detalle de nafta y de gasoil:

Combustible	**Mezcla I**	**Mezcla II**	**Total**	**Demanda**
Nafta [m^3]	30000	80000	110000	75000
Gasoil [m^3]	15000	64000	79000	60000

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

Se pueden llamar problemas de programación lineal a todos aquellos que permiten hacer una distribución más eficiente de recursos limitados, fijándose un objetivo concreto por medio de una función. Objetivos concretos pueden ser como ejemplos: maximizar un beneficio, o minimizar un costo.

Vamos a considerar el planteo teórico de algunos problemas de aplicación.

A) PROBLEMAS DE TRANSPORTES O DE DISTRIBUCION

Un mayorista provee mercaderías desde dos centros de distribución D1 y D2, hacia 3 centros de comercialización C1, C2 y C3.

Llamemos:

$x_{i,j}$ mercadería remitida del centro de distribución i al centro de comercialización j,

a_i mercadería despachada por el almacén i,

b_j mercadería recibida por el comercio j.

Supuesto que toda la mercadería despachada es la única mercadería recibida, entonces

$$\sum_{i=1}^{i=2} a_i = \sum_{j=1}^{j=3} b_j \qquad \wedge \qquad x_{i,j} \geq 0$$

podemos construir la siguiente tabla:

Almacenes (centro de distribución)	centros de consumo y comercialización			Merc. despachada Máximo
	C1	**C2**	**C3**	
D1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	a_1
D2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	a_2
	b_1	b_2	b_3	

Obtenemos el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq a_1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq a_2 \\ x_{1,1} + x_{2,1} \leq b_1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} \leq b_2 \\ x_{1,3} + x_{2,3} \leq b_3 \\ x_{i,j} \geq 0 \quad i = 1,2\,;\, j = 1,2,3 \end{cases}$$

Suponemos que conocemos el costo del transporte desde el centro de distribución i al centro de comercialización j. Tenemos asi una matriz de costo como la siguiente:

	C1	**C2**	**C3**
C	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
D	$D_{2,1}$	$D_{2,2}$	$D_{2,3}$

La función objetivo es: $\boxed{f(\overline{x}) = C_{1,1}x_{1,1} + C_{1,2}x_{1,2} + C_{1,3}x_{1,3} + C_{2,1}x_{2,1} + C_{2,2}x_{2,2} + C_{2,3}x_{2,3}}$ la cual hay que minimizar.

B) PROBLEMA DE DISTRIBUCION DE RECURSOS

Un industrial dispone de materias primas, mano de obra y maquinarias para la producción de bienes y pretende, con su distribución, maximizar el beneficio.

Denotamos con:

x_j número de artículos de la especie j producidos ($j = 1, 2, ..., n$),

$a_{i,j}$ número de unidades de consumo del recurso i para producir el artículo j,

b_i disponibilidad máxima del recurso i ($i = 1, 2, 3$).

Podemos construir la siguiente tabla:

Recursos	x_1	x_2	x_3	...	x_n	Disponibilidades
Materia prima	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	...	$a_{1,n}$	b_1
Mano de obra	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	...	$a_{2,n}$	b_2
Máquinas	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	...	$a_{3,n}$	b_3

Si c_i es el beneficio en la venta del artículo i, la funcional a <u>maximizar</u> es

$$\boxed{B(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n}$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \le b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n \le b_3 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

METODO SIMPLEX

Introducción

Como lo visto en las aplicaciones anteriores, el problema de programación lineal consiste en hallar un vector $\overline{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ que haga máxima (ó mínima) una función lineal llamada función objetivo

$$f_{(\bar{x})} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n \le b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n \le b_3 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n \le b_m \end{cases}$$

donde $\quad x_1 \ge 0 \,;\, x_2 \ge 0 \,;\, x_3 \ge 0 \,;\, x_4 \ge 0 \,;\cdots \quad \to \quad x_i \ge 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3, \cdots, n$

Incorporando las variables **Slack**, no negativas, $s_i \; i = 1, 2, 3, \cdots, m$, las desigualdades se transforman en igualdades de la forma

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \cdots + a_{i,n}x_n + s_i = b_i \; i = 1, 2, \cdots, m$$

quedando un sistema de ecuaciones lineales cuya expresión matricial es

$A \cdot Z = B$ donde $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times(n+m)}}$, $B = ((b_{i,j})) \in \mathbf{R}^{\mathbf{m\times1}}$, $Z = ((z_{i,j})) \in \mathbf{R}_{\geq\mathbf{0}}^{\mathbf{(n+m)\times1}}$ con

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde la funcional es ahora

$$f_{(\bar{z})} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + \cdots + 0 \cdot s_m$$

puesto que las variables slack tienen costo nulo.

Si en el sistema de ecuaciones resultante todos los elementos de *B* son no negativos, exite una solución factible y básica dada por

$$\bar{Z} = Z^T = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) = (0,0,0,\cdots,0, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m)$$

pero con un valor de la funcional nulo. En este método, a partir de esta solución básica, se construye mediante un proceso iterativo, una sucesión de soluciones que mejoren la funcional hasta su optimización.

Veremos, primariamente, su implementación por medio de problemas.

PROBLEMA Nro. 7

Una empresa manufacturera paralizó la producción de ciertos productos por bajas utilidades. Esto generó una capacidad ociosa de producción. Se planteó entonces la necesidad de asignar a esa nueva capacidad disponible a la elaboración de hasta 3 productos (1, 2, 3). La información elaborada es la siguiente:

Tipo de maquina a utilizar	**Disponibilidad [hs/semana]**	**demanda de 1**	**horas de máq. 2**	**por artículo 3**
Fresadora	280	8	2	3
Torno	100	4	3	0
Rectificadora	60	2	1	1

Marqueting informa que el potencial de ventas para los 3 productos supera la máxima producción posible, o sea que la demanda del mercado es superior a la producción factible, lo que posibilita que todo lo producido pueda ser vendido. Los beneficios son \$ 20, \$ 6, \$ 8 para los productos 1, 2 y 3 respectivamente.

Fijar la producción de cada producto para <u>maximizar</u> los beneficios.

Llamemos x_1, x_2 y x_3 a las cantidades producidas de los artículos 1, 2 y 3. La función objetivo a maximizar es: $\boxed{f(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3}$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 280 & \rightarrow \quad \text{fresadora} \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 100 & \rightarrow \quad \text{torno} \qquad\qquad \text{donde } x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 & \rightarrow \quad \text{rectificadora} \end{cases}$$

Introduciendo las variables <u>slack</u> s_1, s_2, s_3 no negativas, tenemos el sistema de ecuaciones $A \cdot Z = B$:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 280 \\ 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 100 \qquad \text{con la nueva funcional } \boxed{f(\bar{z}) = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 60 \end{cases}$$

Partimos de la solución básica factible $\overline{Z} = Z^T = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0,0,0,280,100,60)$.

Expresamos el sistema en función de los vectores columna:

$$x_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$x_1\, P_1 + x_2\, P_2 + x_3\, P_3 + s_1\, P_4 + s_2\, P_5 + s_3\, P_6 = B$$

La solución básica verifica: $0P_1 + 0P_2 + 0P_3 + 280P_4 + 100P_5 + 60P_6 = B$, es decir que

$$\boxed{280P_4 + 100P_5 + 60P_6 = B} \qquad \text{(I)}$$

Al subespacio generado por los vectores columna $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, B\}$ de la matriz ampliada, se le asocia una primera base dada por $\{P_4, P_5, P_6\}$. Pero dicha base, está asociada únicamente con las variables slack, y esto hace que la funcional correspondiente tenga valor nulo.

Queremos introducir P_1 en la base $\{P_4, P_5, P_6\}$. Expresamos dicho vector columna como combinación de los vectores de la base inicial, resultando $P_1 = 8P_4 + 4P_5 + 2P_6$, de donde

$$\boxed{8P_4 + 4P_5 + 2P_6 - P_1 = \overline{0}} \qquad \text{(II)}$$

Hacemos una combinación lineal de (I) y (II) en base a un parámetro θ tal que (I) – θ (II) = *B*,

$$(280 - 8\theta)P_4 + (100 - 4\theta)P_5 + (60 - 2\theta)P_6 + \theta P_1 = B \qquad \text{(III)}$$

Para tener soluciones al sistema de variables no negativas, identificadas con los coeficientes de los vectores en la combinación lineal de *B*, tenemos que tomar el θ mínimo que haga nulo uno de los coeficientes de P_4, P_5 ó P_6.

$$280 - 8\theta = 0 \Rightarrow \theta = 35 \quad 100 - 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = 25; \quad 60 - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 30$$

$$\theta = \min\{35, 25, 30\} = 25$$

Reemplamos θ = 25 en (III), resultando $80P_4 + 10P_6 + 25P_1 = B$. Sale P_5 de la base, siendo la misma ahora $\{P_4, P_6, P_1\}$. La nueva solución factible es

$$\overline{Z} = Z^T = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (25,0,0,80,0,10)$$

cuya funcional tiene un valor $\boxed{f(\bar{z}) = 20 \cdot 25 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 80 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 60 = 500}$.

La nueva solución incrementa de 0 a 500 el valor de la funcional. Debemos seguir con el proceso iterativo introduciendo en la base otros vectores para mejorar el funcional. Para ello, presentamos a continuación la resolución del problema por medio de los cuadros del simplex.

El cuadro del simplex del sistema original es el siguiente, donde se utilza la matriz ampliada del sistema original:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	solución
	8	2	3	1	0	0	280	$s_1 = 280$
	4	3	0	0	1	0	100	$s_2 = 100$
	2	1	1	0	0	1	60	$s_3 = 60$
c$_j$	20	6	8	0	0	0	f	
	↑	↑	↑					

indicadores positivos (coeficientes de la funcional)

De los indicadores 20, 6 y 8, elegimos 20 por ser el de mayor valor y por tanto tener mayor incidencia en el funcional. De la columna correpondiente al indicador elegido (vector columna P_1) elegimos aquel elemento positivo que satisfaga ser el

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\right\}_{i=1,2,3} = \min\left\{\frac{280}{8}, \frac{100}{4}, \frac{60}{2}\right\} = \min\{35, 25, 30\} = 25$$

o sea, elegimos $a_{2,1} = 4$. Se elige el mínimo para evitar variables negativas. Transformamos en pivote unitario al elemento elegido multiplicando la segunda fila por ¼ o sea $1/\ a_{2,1}$, llegando al siguiente cuadro:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	solución
	8	2	3	1	0	0	280	s_1
F_2 (1/4) →	1	3/4	0	0	1/4	0	25	s_2
	2	1	1	0	0	1	60	s_3
c_j	20	6	8	0	0	0	f	
	↑				↓			

Reducimos los restantes elementos de la primer columna a 0 mediante transformaciones elementales a partir del elemento pivote $a_{2,1} = 1$. Obtenemos así el vector P_1 en forma canónica que reemplace en la base de los vectores columna $\{P_4, P_5, P_6\}$ a P_5.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	solución
$F_{1,\,2\,(-8)}$ →	0	- 4	3	1	- 2	0	80	$s_1 = 80$
	1	3/4	0	0	1/4	0	25	$x_1 = 25$
$F_{3,2\,(-2)}$ →	0	- 1/2	1	0	0	1	10	$s_3 = 10$
$F_{4,\,2\,(-20)}$ →	0	- 9	8	0	- 5	0	f - 500	

↑ mayor indicador positivo

<u>Nomenclatura</u>: $F_{3,2\,(-2)}$ ≡ a la fila 3 se la cambia por →fila 3 + fila 2 previamente multiplicada por (-2)...
Observamos que en la solución, entró x_1 y salió s_1. El próximo indicador corresponde al 8. Calculamos

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i,3}}\right\}_{i=1,2,3} = \min\left\{\frac{80}{3}, \frac{10}{1}\right\} = \min\{26.67,\ 10\} = 10$$

Elegimos el elemento $a_{3,3}$. Como ya tiene un valor unitario, no es necesario modificar la fila 3. Operando nuevamente:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	solución
$F_{1,\,3\,(-3)}$ →	0	- 5/2	0	1	- 2	- 3	50	$s_1 = 50$
	1	3/4	0	0	1/4	0	25	$x_1 = 25$
	0	- 1/2	1	0	0	1	10	$x_3 = 10$
$F_{4,\,3\,(-8)}$ →	0	- 5	0	0	- 5	- 8	f - 580	

el proceso se considera <u>terminado</u> porque no existe ningún indicador positivo

Funcional correspondiente a la solución obtenida:

$f = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 20 \cdot 25 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 10 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 580$ (**Max**)

PROBLEMA Nro. 8

Resolver aplicando el método simplex el siguiente problema y verificar el resultado por el método gráfico.

$$\text{Restricciones:}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases} \qquad \text{Funcional a maximizar: } f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2$$

Convertimos las desigualdades en igualdades con la incorporación de las variables positivas slack

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + s_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + s_3 = 12 \end{cases} \quad \text{quedando la funcional } f_{(\bar{Z})} = 3x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3.$$

Construimos la tabla apropiada para la aplicación del método simplex

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	**solución**	c_k
-1	2	1	0	0	6	$s_1 = 6$	0
2	1	0	1	0	20	$s_2 = 20$	0
1	2	0	0	1	12	$s_3 = 12$	0
3	4	0	0	0	f		

$\uparrow$ máximo indicador positivo

c_k: coeficientes (o índices) de la solución en la funcional; $f = 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,2}}\right\}_{i=1,2,3} = \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{20}{1}, \frac{12}{2}\right\} \Rightarrow \theta = \min\{3{,}20{,}6\} = 3$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{1,2}$; entra x_2, sale s_1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	**solución**	c_k
$F_1(1/2) \rightarrow$	-1/2	1	1/2	0	0	3	$x_2 = 3$	4
$F_{2,1(-1)} \rightarrow$	5/2	0	-1/2	1	0	17	$s_2 = 17$	0
$F_{3,1(-2)} \rightarrow$	2	0	-1	0	1	6	$s_3 = 6$	0
$F_{4,1(-4)} \rightarrow$	5	0	-2	0	0	f - 12		

$\uparrow$ máximo indicador positivo; $f = 4x_2 + 0s_2 + 0s_3 = 4 \cdot 3 + 0 + 0 = 12$

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\right\}_{i=1,2,3} = \min\left\{\frac{3}{-1/2}, \frac{17}{5/2}, \frac{6}{2}\right\} \Rightarrow \theta = \min\{6.8{,}3\} = 3$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{3,1}$; entra x_1 sale s_3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	**solución**	c_k
$F_1(1/2) \rightarrow$	0	1	1/4	0	1/4	9/2	$x_2 = 9/2$	4
$F_{2,1(-1)} \rightarrow$	0	0	3/4	1	-5/4	19/2	$s_2 = 19/2$	0
$F_{3,1(-2)} \rightarrow$	1	0	-1/2	0	1/2	3	$x_1 = 3$	3
$F_{4,1(-4)} \rightarrow$	0	0	1/2	0	-5/2	f - 27		

$\uparrow$ máximo indicador positivo;

$f = 3x_1 + 4x_2 + 0s_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (9/2) + 0 = 27$

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{j,3}}\right\}_{i=1,2,3} = \min\left\{\frac{9/2}{1/4}, \frac{19/2}{3/4}, \frac{3}{-1/2}\right\} \Rightarrow \theta = \min\{18, 38/3\} = 38/3$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{2,3}$; entra s_1 sale s_2

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	solución	c_k
$F_1(1/2) \rightarrow$	0	1	1/4	-1/3	2/3	4/3	$x_2 = 4/3$	4
$F_{2,1(-1)} \rightarrow$	0	0	1	4/3	-5/3	38/3	$s_1 = 38/3$	0
$F_{3,1(-2)} \rightarrow$	1	0	-1/2	2/3	-1/3	28/3	$x_1 = 28/3$	3
$F_{4,1(-4)} \rightarrow$	0	0	0	-2/3	-5/3	f - (100/3)		

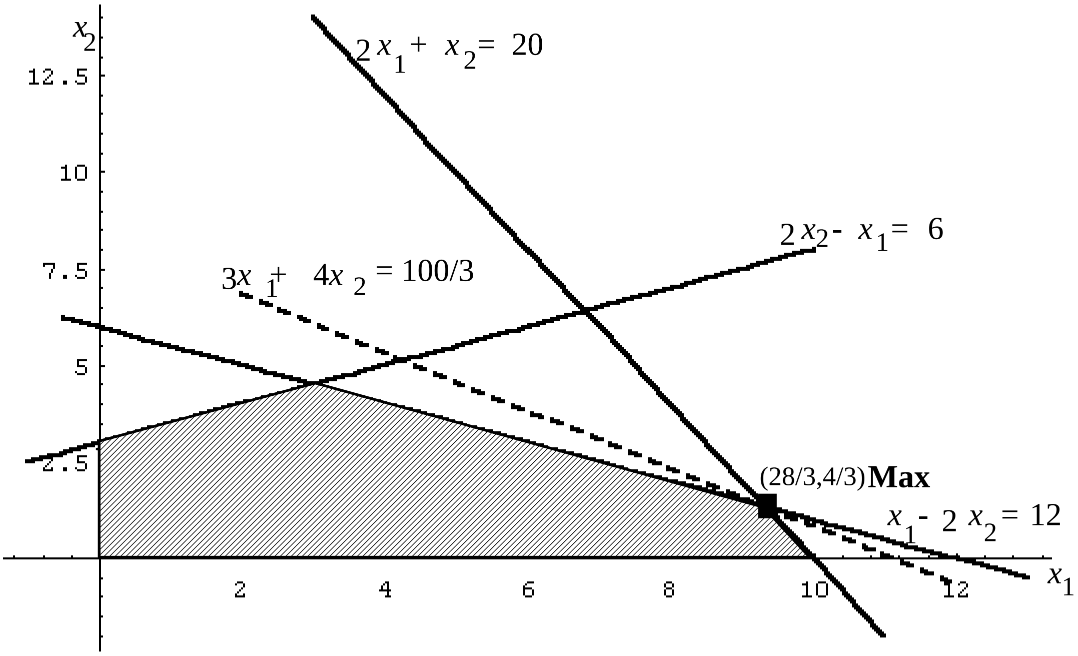
No existe ningún indicador $\Rightarrow$ se concluye el proceso.

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0s_2 = 3 \cdot (28/3) + 4 \cdot (4/3) + 0 \cdot (38/3) = 100/3 \text{ (Máximo)}$$

Sucesión de soluciones:

$$s_1 = 6; s_2 = 20; s_3 = 12; x_1 = 0; x_2 = 0 \rightarrow f = 0$$
$$x_2 = 3; s_2 = 17; s_3 = 6; x_1 = 0; s_1 = 0 \rightarrow f = 12$$
$$x_2 = 9/2; s_2 = 19/2; x_1 = 3; s_1 = 0; s_3 = 0 \rightarrow f = 27$$
$$x_2 = 4/3; s_2 = 38/3; x_1 = 28/3; s_1 = 0; s_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{f = 100/3}$$

El máximo de la funcional corresponde a $\boxed{(x_1, x_2) = (28/3, 4/3)}$ con $f(x_1, x_2) = f(28/3, 4/3) = 100/3$



PROBLEMA Nro. 9

Dado el sistema de restricciones $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15000 \\ 2x_1 + x_2 \le 10000 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 12000 \\ x_1 + x_2 \le 10000 \end{cases}$, maximizar la función beneficio $\boxed{f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2}$

Incorporamos las variables slack: $s_i \ge 0$, i =1, 2, 3, 4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + s_1 = 15000 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 10000 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_3 = 12000 \\ x_1 + x_2 + s_4 = 10000 \end{cases} \text{,con } f_{(\bar{Z})} = 4x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \text{ para } \underline{\text{maximizar}}$$

Construimos la tabla apropiada para la aplicación del método simplex

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución	c_k
	1	3	1	0	0	0	15000	$s_1 = 15000$	0
$F_2(1/2) \to$	2	1	0	1	0	0	10000	$s_2 = 10000$	0
	2	2	0	0	1	0	12000	$s_3 = 12000$	0
	1	1	0	0	0	1	10000	$s_4 = 10000$	0
c_j	4	3	0	0	0	0	f		

↑ máximo indicador positivo; valor de la funcional $f = 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 0$

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\right\}_{i=1,2,3,4} = \min\left\{\frac{15000}{1}, \frac{10000}{2}, \frac{12000}{2}, \frac{10000}{1}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = \min\{15000, 5000, 6000, 10000\} = 5000 \Rightarrow$ elemento pivote $a_{2,1}$; entra x_1 ,sale s_2

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución	c_k
$F_{1,2(-1)} \to$	1	3	1	0	0	0	15000	$s_1 = 15000$	0
	1	1/2	0	1/2	0	0	5000	$s_2 = 50000$	0
$F_{3,2(-2)} \to$	2	2	0	0	1	0	12000	$s_3 = 12000$	0
$F_{4,2(-1)} \to$	1	1	0	0	0	1	10000	$s_4 = 10000$	0
$F_{5,2(-4)} \to$	4	3	0	0	0	0	f		

Realizando las operaciones mencionadas, obtenemos:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución	c_k
$F_{1,3(-5/2)} \to$	0	5/2	1	-1/2	0	0	10000	$s_1 = 10000$	0
$F_{2,3(-1/2)} \to$	1	1/2	0	1/2	0	0	5000	$x_1 = 5000$	4
	0	1	0	-1	1	0	2000	$s_3 = 2000$	0
$F_{4,3(-1/2)} \to$	0	1/2	0	-1/2	0	1	5000	$s_4 = 5000$	0
$F_{5,3(-1)} \to$	0	1	0	-2	0	0	f - 20000		

↑máximo indicador positivo; funcional $f = 0s_1 + 4x_1 + 0s_3 + 0s_4 = 20000$

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,2}}\right\}_{i=1,2,3,4} = \min\left\{\frac{10000}{5/2}, \frac{5000}{1/2}, \frac{2000}{1}, \frac{5000}{1/2}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \theta = \min\{4000, 10000, 2000, 10000\} = 2000 \Rightarrow$ elemento pivote $a_{3,2}$; entra x_2 ,sale s_3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución	c_k
	0	0	1	2	-5/2	0	5000	$s_1 = 5000$	0
	1	0	0	1	-1/2	0	4000	$x_1 = 4000$	4
	0	1	0	-1	1	0	2000	$x_2 = 2000$	3
	0	0	0	0	-1/2	1	4000	$s_4 = 4000$	0
c_j	0	0	0	-1	-1	0	f - 22000		

No hay otro indicador positivo $\Rightarrow$ concluye el proceso.

funcional (Máxima) $f = 0s_1 + 4x_1 + 3x_2 + 0s_4 = 22000$

Corresponde a: $s_1 = 5000; x_1 = 4000; x_2 = 2000; s_4 = 4000; s_2 = 0; s_3 = 0 \to \boldsymbol{f = 22000}$

El máximo de la funcional corresponde a $\boxed{(x_1, x_2) = (4000{,}2000)}$ con $f(x_1, x_2) = 22000$

La verificación gráfica queda por hacer.

PROBLEMA Nro.10

Problema de asignación de recursos productivos

Un fabricante de juguetes tiene en fabricación 4 tipos de juguetes que llamaremos A, B, C y D. La cantidad de horas demandada para la fabricación está dada de acuerdo al siguiente detalle, teniendo en cuenta 3 especialidades globales (carpintería, pinturería y armado), no puediendo superarse las horas disponibles mensuales.

especialidad	juguete A	juguete B	juguete C	juguete D	disponibilidad horaria
carpintería	0.20	0.25	0.35	0.15	4000
pinturería	0.10	0.10	0.20	0.12	2000
armado	0.15	0.18	0.30	0.25	2400

La unidad de los elementos del cuadro están dadas en horas/juguete con excepción de los elementos de la última columna que están especificados en horas.

La demanda del mercado, no supera las 10000 unidades del juguete A ni 15000 unidades para el juguete D, tiene un mínimo de 1600 unidades para el juguete B, y no conoce restricciones para la comercialización del juguete C.

Se pide maximizar la utilidad total, si el precio de los juguetes es de 8, 5, 7 y 15 unidades monetarias para A, B, C, y D, respectivamente.

Planteo del problema

Llamando x_1, x_2, x_3 y x_4 a la cantidad de juguetes A, B, C y D, tendremos las siguientes restricciones

$$\begin{cases} 0.20x_1 + 0.25x_2 + 0.35x_3 + 0.15x_4 \le 4000 \\ 0.10x_1 + 0.10x_2 + 0.20x_3 + 0.12x_4 \le 2000 \\ 0.15x_1 + 0.18x_2 + 0.30x_3 + 0.45x_4 \le 2400 \\ x_1 \le 10000 \\ x_2 \ge 1600 \\ x_4 \le 15000 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que maximizar es: $\boxed{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 15x_4}$

Dificultades de la resolución

Debido a la orientación de la quinta desigualdad (≥) no es posible con los elementos hasta aquí vistos, resolver este problema.

Hagamos una síntesis de lo desarrollado para el método simplex.

TABLA INICIAL DEL METODO SIMPLEX

Planteado el sistema que representa el problema de programación lineal donde todas las restricciones sean de menor o igual (≤) y elegido para su resolución el método simplex, la tabla representativa inicial es:

	variables de las desigualdades lineales						variables slack				t.i.		
	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m	b_j	**solución**	
	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	…	$a_{1,n}$	1	0	…	0	b_1	s_1	
i.	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	…	$a_{2,n}$	0	1	…	0	b_2	s_2	v.
r.	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	b.
	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$a_{m,3}$	$a_{m,4}$	…	$a_{m,n}$	....	....	…	1	bm	s_m	
c_k	c_1	c_2	c_3	c_4	…	c_n	**0**	**0**	…	**0**	f		

coeficientes de la función objetivo
(indicadores)

con t.i.: términos independientes; i.r.: inecuaciones restrictivas; v.b.: variables básicas

A esta tabla inicial le corresponde una solución básica factible dada por

$$\boxed{s_1 = b_1; s_2 = b_2; \cdots; s_m = b_3; x_1 = 0; x_2 = 0; \cdots; x_n = 0}$$

cuya funcional tiene valor nulo pues:

$$\boxed{f = c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_n 0 + 0b_1 + 0b_2 + \cdots + 0b_3 = 0}$$

Para mejorar el valor de la funcional, debe buscarse una solución mejor. Detallamos a continuación los pasos ha seguir.

1º) Elíjase el vector columna j de la tabla con mayor indicador positivo (puede ser más de una) y considérese todas los componentes positivas $a_{i,j}$ de esa columna j.

Defínase como elemento pivote de esta columna a la componente $a_{i,j}$ de tal modo que $\theta_i = (b_i / a_{i,j})$ sea mínimo para todos los i = 1, 2, ... , m. Si existe más de uno mínimo, se elige uno cualquiera de ellos.

2°) Hágase el elemento pivote $a_{i,j}$ igual a 1, multiplicando la fila i por $(1/ a_{i,j})$.

3°) Usando el elemento pivote $a_{i,j} = 1$, mediante transformaciones elementales de fila, transfórmese en valor nulo los elementos restantes de la columna j, incluyendo también el correspondiente a la fila de los coeficientes de la función objetivo c_k.

4°) Entra en la solución la variable x_j y sale la variable s_i. Quedan en la solución las restantes variables slack s_t con $t \neq i$ y las varibles x_r siguen valiendo cero para $r \neq j$. Con ello el valor de la funcional aumenta pues $c_j x_j > 0$.

Repítase este proceso mientras existan indicadores positivos en la fila c_k, llegando a la tabla terminal cuando ya no hay ningún indicador positivo.

PROBLEMA Nro. 11

Sea el siguiente ejemplo, donde ya están incorporadas las variables slack:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + s_1 = 40 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + s_2 = 20 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 + 2x_5 + s_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + s_4 = 30 \end{cases}$$

con función objetivo a <u>maximizar</u> dada por: $f_{(\bar{Z})} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
	1	1	3	4	4	1	0	0	0	40	$s_1 = 20$
	0	2	1	2	1	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$
	1	5	0	1	2	0	0	1	0	10	$s_3 = 10$
	1	4	1	3	2	0	0	0	1	30	$s_4 = 30$
c_k	1	1	1	1	2	0	0	0	0	f	

↑ máximo indicador positivo

valor de la funcional $f_{(\bar{Z})} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 0$

1) Elegimos el mayor de los indicadores positivo, $c_5 = 2$. Este coeficiente es el de mayor incidencia en la funcional.

2) Definimos el elemento pivote de esta columna P_5 a partir de

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,5}}\right\}_{i=1,2,3,4} = \min\left\{\frac{40}{4}, \frac{20}{1}, \frac{10}{2}, \frac{30}{2}\right\} = \min\{10, 20, 5, 15\} = 5$$

El elemento que corresponde a este valor de θ es $a_{3,5} = 2$, tomado como elemento pivote. Así entrará en la solución x_5 y saldrá s_3.

3) Multiplicamos la tercer fila por (1/2) para transformar en 1 al elemento pivote: $F_3(1/2)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
	1	1	3	4	4	1	0	0	0	40	$s_1 = 40$
	-1/2	2	1	2	1	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$
$F_3(1/2)\rightarrow$	1/2	5/2	0	1/2	1	0	0	1/2	0	5	$s_3 = 10$
	0	4	1	3	2	0	0	0	1	30	$s_4 = 30$
c_k	0	1	1	1	2	0	0	0	0	f	

4) Con el elemento pivote $a_{3,5} = 1$ reducimos a cero los restantes elementos de la quinta columna, mediante transformaciones elementales de fila.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
$F_{1,3(-4)}\rightarrow$	-1	-9	3	2	0	1	0	-2	0	20	$s_1 = 20$
$F_{2,3(-1)}\rightarrow$	-1/2	-1/2	1	3/2	0	0	1	-1/2	0	15	$s_2 = 15$
	1/2	5/2	0	1/2	1	0	0	1/2	0	5	$x_5 = 5$
$F_{4,3(-2)}\rightarrow$	0	-1	1	2	0	0	0	-1	1	20	$s_4 = 20$
$F_{5,3(-2)}\rightarrow$	0	-4	1	0	0	0	0	-1	0	f - 10	

↑ máximo indicador positivo

valor de la funcional $f_{(\bar{Z})} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 0\cdot 20 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 20 = 10$

En la solución entró la variable x_5 y salió s_3, mejorando el funcional.

5) Elegimos el único indicador positivo que permitiría mejorar el funcional, $c_3 = 2$.

6) Definimos el elemento pivote de esta columna P_3 a partir de

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,3}}\right\}_{i=1,2,3,4} = \min\left\{\frac{20}{3}, \frac{15}{1}, \frac{20}{1}\right\} = \min\left\{\frac{20}{3}, 15, 20\right\} = \frac{20}{3}$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{1,3}=3$, entrará x_3, saldrá s_1.

7) Multiplicamos la primer fila por (1/3) para transformar en 1 al elemento pivote: $F_1(1/3)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
$F_1\,(1/3)\rightarrow$	-1/3	-3	1	2/3	0	1/3	0	-2/3	0	20/3	$s_1 = 20$
	-1/2	-1/2	1	3/2	0	0	1	-1/2	0	15	$s_2 = 15$
	1/2	5/2	0	1/2	1	0	0	1/2	0	5	$x_5 = 5$
	0	-1	1	2	0	0	0	-1	1	20	$s_4 = 20$
c_k	0	-4	1	0	0	0	0	-1	0	f - 10	

8) Operamos con transformaciones elementales, reduciendo a 0 los restantes elementos de la tercer columna.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
	-1/3	-3	1	2/3	0	1/3	0	-2/3	0	20/3	$x_3 = 20/3$
$F_{2,1(-1)}\rightarrow$	-1/6	5/2	0	5/6	0	-1/3	1	1/6	0	25/3	$s_2 = 25/3$
	1/2	5/2	0	1/2	1	0	0	1/2	0	5	$x_5 = 5$
$F_{4,1(-1)}\rightarrow$	1/3	2	0	4/3	0	-1/3	0	-1/3	1	40/3	$s_4 = 40/3$
$F_{5,1(-1)}\rightarrow$	1/3	-1	0	-2/3	0	-1/3	0	-1/3	0	f - (50/3)	

↑ máximo indicador positivo

$$f_{(\bar{Z})} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot(20/3) + 1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 0\cdot 0 + 0\cdot(25/3) + 0\cdot 0 + 0\cdot(40/3) = 50/3$$

En la solución entró la variable x_3 y salió s_1, mejorando el funcional.

9) Elegimos el único indicador positivo, $c_1 = 1/3$, que mejoraría aún más el funcional. Definimos el elemento pivote de esta columna P_1 a partir de

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\right\}_{i=1,2,3,4} \Rightarrow \min\left\{\frac{5}{1/2}, \frac{40/3}{1/3}\right\} = \min\{10, 40\} = 10$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{3,1} = 1/2$, entrará x_1, saldrá x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
	-1/3	-3	1	2/3	0	1/3	0	-2/3	0	20/3	$x_3 = 20/3$
	-1/6	5/2	0	5/6	0	-1/3	1	1/6	0	25/3	$s_2 = 25/3$
$F_3\,(2)\rightarrow$	1	5	0	1	2	0	0	1	0	10	$x_5 = 5$
	1/3	2	0	4/3	0	-1/3	0	-1/3	1	40/3	$s_4 = 40/3$
c_k	1/3	-1	0	-2/3	0	-1/3	0	-1/3	0	f - (50/3)	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	solución
$F_{1,3(1/3)}\rightarrow$	0	-4/3	1	1	2/3	1/3	0	-1/3	0	10	$x_3 = 10$
$F_{2,3(1/6)}\rightarrow$	0	10/3	0	1	1/3	-1/3	1	1/3	0	10	$s_2 = 10$
	1	5	0	1	2	0	0	1	0	10	$x_1 = 10$
$F_{4,3(-1/3)}\rightarrow$	0	1/3	0	1	-2/3	-1/3	0	-2/3	1	10	$s_4 = 10$
$F_{5,3(-1/3)}\rightarrow$	0	-8/3	0	-1	-2/3	-1/3	0	-2/3	0	f - 20	

No hay otro indicador positivo $\Rightarrow$ concluye el proceso.

funcional (Máxima) $f = 1x_1 + 1x_3 + 0s_2 + 0s_4 = 1\cdot 10 + 1\cdot 10 + 0\cdot 10 + 0\cdot 10 = 20$

Corresponde a: $x_1 = x_3 = 10; x_2 = x_4 = 0; s_2 = s_4 = 10; s_1 = 0; s_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{f = 20}$

Rta: El máximo de la funcional corresponde a $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10,0,10,0)}$ con $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 20$.

CONSIDERACIONES GENERALES

1ero. Las inecuaciones planteadas hasta ahora representan restricciones que poseen un límite máximo de disponibilidades (≤). Pero nada impide que puedan presentarse inecuaciones con un límite mínimo de consumo (≥).

Ejemplo de esto último lo representaría la inecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b$ con $b > 0$, en un problema de dieta donde la necesidad mínima de cierta vitamina ($b > 0$) debe ser cubierta mediante la ingestión de ciertas cantidades de alimentos (x_1, x_2, x_3) que aportan, de la misma, determinadas cantidades por unidad de peso (a_1, a_2, a_3).

2do. Recordar que en todo problema de programación lineal se deben cumplir condiciones de no negatividad de las variables reales.

3ro. La utilización del método gráfico, con el polígono convexo, es cómodo y sencillo hasta dos variables reales, pero resulta imposible para más variables. Es por ello que se recurre al método algebraico (Simplex).

4to. La función a optimizar representa una familia monoparamétrica de hiperplanos. Si la funcional es $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = C(\text{cte})$, se busca que valor debe tomar el parámetro C para que f sea óptimo, es decir máximo ó mínimo según el problema.

5to. Si las restricciones del problema están representadas por inecuaciones de menor o igual a las disponibilidades, se incorporan las variables slack para transformar el sistema planteado de inecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales. Las variables slack que igualan las ecuaciones, representan la capacidad ociosa o disponible de las disponibilidades máximas.

6to. Dentro del método algebraico, el simplex provee un sistema rápido y efectivo para la resolución de los problemas de programación lineal.

7mo. Cuando se presentan restricciones de mayor o igual o limite mínimo se incorpora un nuevo tipo de variables artificiales. Podemos analizar esta necesidad a partir del siguiente ejemplo.

Sea el sistema: $\begin{cases} 8x_1 + x_2 \geq 10 \\ 10x_1 + 30x_2 \geq 40 \end{cases}$ con funcional a maximizar $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 15x_2$.

Si incorporamos las variables slack no negativas, s_1 y s_2, se presentarían las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - s_1 = 10 \\ 10x_1 + 30x_2 - s_2 = 40 \end{cases} \text{ con } f(\bar{z}) = 10x_1 + 15x_2 + 0s_1 + 0s_2 .$$

La primera solución básica factible sería: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, -10, -40)$ la cual no cumple la condición de no negatividad de las variables slack. Para obviar este inconveniente, se incorpora al sistema, sumando, una variable λ llamada **artificial** para cada condición de ≥., quedando el sistema de la siguiente forma

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - s_1 + \lambda_1 = 10 \\ 10x_1 + 30x_2 - s_2 + \lambda_2 = 40 \end{cases}$$

8vo. Ya están definidas en la funcional los coeficientes c_j que tienen asignados las variables reales (en el ejemplo $c_1 = 10$, $c_2 = 15$) y los definidos para las variables slacks que son todos nulos.

Cuando las inecuaciones son del tipo menor e igual, para transformarlas en ecuaciones sólo se incorporan las variables slack junto a las variables reales, figurando en la funcional con un valor positivo y costo cero no incidiendo en el valor de dicha funcional.

Las variables artificiales se emplean, con los reales y las slack, en las inecuaciones de mayor o igual correspondiéndoles en la funcional un coeficiente de costo igual a **M** si se minimiza la funcional, e igual a **–M** si se maximiza el funcional, donde **M** es considerado un valor positivo muy grande.

9no. Construcción del diagrama del simplex completo, agregado z_j. Para simplificar, suponemos que tenemos un sistema de inecuaciones de menor o igual, es decir que para transformarlas en inecuaciones, sólo se incorporan las variables slack.

Expresamos primero la matriz ampliada del sistema de ecuaciones de, por ej., el problema n° 9, constituida por las submatrices: una de 4x2 de las variables reales, otra de 4x4 con los vectores columnas unitarios de las variables slack, y otra de 4x1 vector columna B.

	var. reales		variables slack						
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6			
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	**solución x_k**	c_k
	1	3	1	0	0	0	15000	$s_1 = 15000$	0
	2	1	0	1	0	0	10000	$s_2 = 10000$	0
	2	2	0	0	1	0	12000	$s_3 = 12000$	0
	1	1	0	0	0	1	10000	$s_4 = 10000$	0
c_j	4	3	0	0	0	0	f		
z_j	0	0	0	0	0	0	0		
z_j - c_j	-4	-3	0	0	0	0	$-f$		

Como vemos está adicionado un vector columna con las variables que intervienen en la solución factible y, a continuación, una columna c_k de los coeficientes de beneficio o de costo asociados a las variables que pertenecen a la solución x_k. También aparece un vector fila c_j de los coeficientes asociado a las variables en la funcional.

Incorporamos ahora, el vetor fila z_j correspondiente al producto escalar de cada una de las columnas de la matriz ampliada por el vector columna c_k. Por ejemplo:

$$z_1 = (c_k)^T \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$$

Como ya sabemos, la primer solución básica factible es:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0,0,15000,10000,12000,10000) \text{ con } f = 4x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 0$$

Si queremos mejorar el valor de la funcional, introduciremos la variable x_1 (correpondiente al indicador positivo máximo de los c_j) cuyos coeficientes corresponden a la columna P_1. Dicha columna no figura en la base del subespacio de soluciones, formado hasta ahora por $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Si deseamos introducir a P_1 en la base, será necesario reducir las cantidades de los productos P_3, P_4, P_5 y P_6, en la proporción indicada por los coeficientes de P_1. Como la columna de P_1 está fomada por los coeficientes 1, 2, 2, 1, deberá disminuir una unidad de P_3, 2 de P_4, 2 de P_5 y 1 de P_6.

Queda por conocer la incidencia de introducir P_1 y de quitar unidades de P_3, P_4, P_5 y P_6 en la funcional. El beneficio de introducir una unidad de P_1 es 4 (valor dado por su coeficiente de beneficio $c_1 = 4$), y el beneficio de eliminar unidades de P_3, P_4, P_5 y P_6 está dado por $z_1 = (c_k)^T \cdot P_1 = 0$ quedando una ganancia neta en el cambio $c_j - z_j = c_1 - z_1 = 4 - 0 = 4$.

Este valor ($c_j - z_j$), se denomina **costo de oportunidad** y representa lo que se perdería si no se introduce P_1 en la base ó, lo que es lo mismo, si no se introduce x_1 en la solución. Por razones prácticas se opera con ($z_j - c_j$), (que en este caso vale -4), valor que en definitiva indica un balance económico el cual analiza la mejora potencial al introducir x_j en la solución.

En resumen, z_j es lo que se perdería al introducir x_j, y c_j lo se ganaría al introducirlo.

Cuando se maximiza una funcional, puede mejorarse la solución siempre que exista un valor positivo de c_j, ó más general, un valor negativo de ($z_j - c_j$). Si $z_j - c_j = 0$, indicaría que no se produce cambio en la funcional al introducir dicho vector P_j en la base. La introducción de la nueva fila z_j adquiere importancia ante la presencia de las variables artificiales λ_j con un costo M.

PROBLEMA Nro. 12

Se formaliza un pedido, a un proveedor de un fábrica terminal, consistente en 3000 unidades de un repuesto. La entrega debe hacerse de 1000 unidades el primer mes y 2000 el segundo. La capacidad fisica del proveedor es de un máximo de 1100 unidades en horario normal, pudiéndose incrementar esta capacidad en 450 habilitando horas extras. Cada hora extra ocasiona un costo adicional de 360 $/hora y el costo de almacenaje es 20 $/por unidad y por mes. No se dispone de stock, antes de iniciarse la fabricación y se piensa satisfacer sólo la demanda.

Se pregunta el mínimo de horas extras a incrementar en el primer y segundo mes de tareas, para atender el pedido, minimizando los costos de inversión.

Resolución.

Llamamos x_1 y x_2 a la producción de repuestos durante las horas extras del primer y segundo mes, respectivamente.

La máxima capacidad de producción por mes utilizando horas extras es de 450 unidades $\Rightarrow x_1 \leq 450$.

La capacidad máxima del segundo mes es la misma $\Rightarrow x_2 \leq 450$.

Si en el segundo mes, habilitando todas las horas extras disponibles, puede producirse 1100 + 450 =1550, entonces del pedido total de 3000 unidades faltarián producir 3000 − 1550 = 1450 unidades.

De esto se concluye que, como mínimo tienen que producirse durante las horas extras del primer mes 350 unidades $\Rightarrow x_1 \geq 350$.

Además, la produccion normal en los 2 meses será, a lo máximo, de 2200 unidades. Esto implica que, forzosamente, tienen que producirse en horas extras 800 unidades. $\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 800$.

Si cada hora extra insume un costo de $ 360, la funcional de costo será:

$$f(x_1 + x_2) = (360 + 20)x_1 + 360x_2 \qquad \text{(función a } \underline{\text{minimizar}}\text{)}$$

En el adicional de 20 para el primer mes, se contempla el almacenaje de 20 $/mes y por unidad.

En conclusión, llegamos al siguiente planteo:

$$\begin{cases} x_1 \leq 450 \\ x_2 \leq 450 \\ x_1 \geq 350 \\ x_1 + x_2 \geq 800 \end{cases} \quad \text{sujeto a } f(x_1 + x_2) = (360 + 20)x_1 + 360x_2$$

Transformando las desigualdades en igualdades, incorporando variables slack y artificiales, resulta:

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 450 \\ x_2 + s_2 = 450 \\ x_1 - s_3 + \lambda_1 = 350 \\ x_1 + x_2 - s_4 + \lambda_2 = 800 \end{cases}$$

Como el problema es minimizar, se considera un indice de **M** grande para las variables artificiales λ_1 y λ_2. La tabla inicial del simplex es la siguiente

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	λ_1	λ_2	b_i	sol.	c_k
	1	0	1	0	0	0	0	0	450	s_1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0	450	s_2	0
	1	0	0	0	-1	0	1	0	350	λ_1	M
	1	1	0	0	0	-1	0	1	800	λ_2	M
c_j	380	360	0	0	0	0	M	M	f		
z_j	2M	M	0	0	-M	-M	M	M	1150M		
$z_j - c_j$	2M-380	M-360	0	0	-M	-M	0	0			

↑ entra x_1 y sale λ_1

La fila indicada con c_j está constituida por, como en problemas anteriores, los correspondientes coeficientes en la funcional *f*, a las variables reales, las slack incluyendo ahora el de las artificiales.
La fila indicada con z_j correponde al resultado del producto escalar de cada una de las columnas de la matriz ampliada por el vactor columna c_k.Por ejemplo:

$$z_1 = (c_k)^T \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{M} & \mathrm{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathrm{M}$$

Como en este problema la funcional se <u>minimiza</u>, el valor de M es muy grande y positivo. Debemos considerar el mayor valor positivo de (z_j - c_j). Sabemos con esto cual es la variable que debe introducirse en la solución. Necesitamos saber cuál sale, correspondiendose ésta con la posición del pivote de la columna elegida. Asi, elegimos

$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,1}}\right\}_{i=1,2,3,4} \Rightarrow \min\left\{\frac{450}{1}, \frac{350}{1}, \frac{800}{1}\right\} = 350$$

$\Rightarrow$ elemento pivote $a_{3,1} = 1$, entra x_1 ,sale λ_1

Primera solución básica factible: $s_1 = 450, s_2 = 450, \lambda_1 = 350, \lambda_2 = 800$, restantes variables nulas
valor de la funcional $f = 1150\mathrm{M}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	λ_1	λ_2	b_i	**sol.**	c_k
$F_{1,3(-1)} \rightarrow$	0	0	1	0	1	0	-1	0	100	s_1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0	450	s_2	0
	1	0	0	0	-1	0	1	0	350	x_1	380
$F_{4,3(-1)} \rightarrow$	0	1	0	0	1	-1	-1	1	450	λ_2	M
$F_{5,3(-380)} \rightarrow$	0	360	0	0	380	0	M-380	M	*f* - 133000		
z_j	380	M	0	0	M-380	-M	380-M	M	133000+450M		
z_j - c_j	380	M-360	0	0	M-760	-M	760-2M	0			

$\uparrow$ entra x_2 y sale λ_2

La nueva solución que obtenemos es: $s_1 = 100, s_2 = 450, x_1 = 350, \lambda_2 = 450$, las restantes son nulas
valor de la funcional $f = 133000 + 550\mathrm{M}$ (menor que la anterior)
Al elegir el elemento pivote a través de

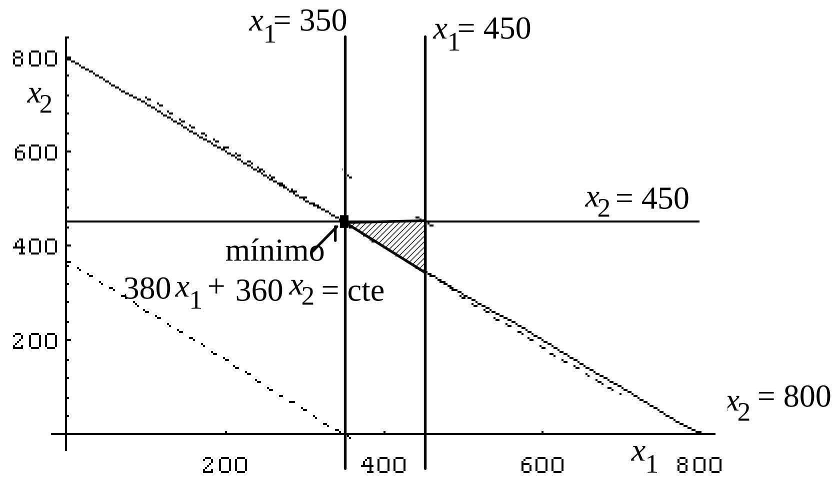
$$\theta > 0 \wedge \theta = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,2}}\right\}_{i=1,2,3,4} \Rightarrow \min\left\{\frac{450}{1}, \frac{450}{1}\right\} = 450$$

tenemos dos valores iguales de $\theta = 450$ para $a_{2,2}$ y $a_{4,2}$; optamos por $a_{4,2} = 1$ para hacer salir la variable artificial λ_2.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	λ_1	λ_2	b_i	**sol.**	c_k
	0	0	1	0	1	0	-1	0	100	s_1	0
$F_{2,4(-1)} \rightarrow$	0	0	0	1	-1	1	1	-1	0	s_2	0
	1	0	0	0	-1	0	1	0	350	x_1	380
	0	1	0	0	1	-1	-1	1	450	x_2	360
$F_{5,,4(-360)} \rightarrow$	0	0	0	0	20	360	M-20	M-360	*f* - 295000		
z_j	380	360	0	0	-20	-360	20	360	295000		
z_j - c_j	380	360	0	0	0	0	-M+40	-M+720			

Solución: $x_1 = 350, x_2 = 450, s_1 = 100$, la restantes son nulas;
valor de la funcional: $f = 380x_1 + 360x_2 + 0 \cdot s_1 = 295000$ (mínimo)
Ya no puede repetirse el proceso.

Respuesta al problema: deben producirse 350 unidades en horas extra el primer mes (x_1) y 450 unidades en horas extra el segundo mes (x_2) para minimizar la inversión en horas extras.
Observación: resulta lógico pensar que para determinar esta solución, se podría haber llegado en forma intuitiva, pero, usándolo como ejemplo es una prueba de la validez del método.



PROBLEMA Nro. 13

El planteo de este ejercicio corresponde a un problema real publicado en la revista "Boletín de Informaciones Petroleras". Año 1962, autor Ing. Isidro López.

En la planta de una destilería se reciben tres tipos de crudos de petróleo de distinta procedencia para su destilación y se desea obtener como productos nafta, kerosene, gasoil y fueloil. Cada crudo tiene un rendimiento diferente para un mismo producto al producirse el destilado, dependiendo de su procedencia. Estos valores fueron tabulados de acuerdo al siguiente detalle.

Destilado	**Crudo "A"**	**Crudo "B"**	**Crudo "C"**
Nafta	0.4	0.3	0.1
Kerosene	0.3	0.1	0.2
Gas oil	0.2	0.2	0.4
Fuel oil	0.1	0.4	0.3
Beneficio [$/m^3]	1200	700	900

La capacidad máxima de almacenamiento de la planta es 100000 m^3 de destilados. Además, de acuerdo a la demanda, la producción mínima de nafta debe ser de 20000 m^3 pero, por la capacidad de almacenaje, no puede superar los 30000 m^3. El kerosene obtenido debe ser superior a los 10000 m^3 y el gas oil y fuel oil, como mínimo, debe satisfacer una demanda de 25000 m^3 y 20000 m^3, respectivamente.

Se pide hallar la mezcla de crudos que maximice el beneficio.

Resolución.
Sean x_1, x_2, x_3 variables reales correspondientes a las cantidades (en m^3) de crudo de petróleo que ingresan a la destilería del tipo "A", "B" y "C", respectivamente.

El sistema de inecuaciones restrictivas es el siguiente

$$\begin{cases} 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 \geq 20000 & \rightarrow \text{ demanda mínima de nafta} \\ 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 \leq 30000 & \rightarrow \text{ máximo almacenaje de nafta} \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \geq 10000 & \rightarrow \text{ demanda mínima de kerosene} \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 \geq 25000 & \rightarrow \text{ demanda mínima de gas oil} \\ 0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 \geq 20000 & \rightarrow \text{ demanda mínima del fuel oil} \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 100000 & \rightarrow \text{ máximo almacenaje en planta para crudo} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 & \rightarrow \text{ soluciones no negativas} \end{cases}$$

sujeto a la funcional: $f = 1200x_1 + 700x_2 + 900x_3$ a <u>maximizar</u>.

Esta funcional interpreta la cantidad de los crudos que se deberían destilarse para obtener el máximo beneficio.

Convertimos el sistema de incecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales, incorporando variables slack s_i y variables artificiales λ_i.

$$\begin{cases} 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 - s_1 + \lambda_1 = 20000 \\ 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + s_2 = 30000 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 - s_3 + \lambda_2 = 10000 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 - s_4 + \lambda_3 = 25000 \\ 0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 - s_5 + \lambda_4 = 20000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_6 = 100000 \end{cases}$$

Confeccionamos la tabla inicial del simplex, tomando c_j = -M para las variables artificiales λ_i ya que en el problema se debe maximizar la funcional.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	**solución**	c_k
	0.4	0.3	0.1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20000	$\lambda_1 = 20000$	-M
	0.4	0.3	0.1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	30000	$s_2 = 30000$	0
	0.3	0.1	0.2	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	10000	$\lambda_2 = 10000$	-M
	0.2	0.2	0.4	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	25000	$\lambda_3 = 25000$	-M
	0.1	0.4	0.3	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	20000	$\lambda_4 = 20000$	-M
	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	100000	$s_6 = 100000$	0
c_j	1200	700	900	0	0	0	0	0	0	-M	-M	-M	-M	f		

Primera soluión básica factible:

$\lambda_1 = 20000; \lambda_2 = 10000; \lambda_3 = 25000; \lambda_4 = 20000; s_2 = 30000; s_6 = 10000$; las restantes son nulas

Como la funcional que corresponde es ahora:

$$\boxed{f = 1200x_1 + 700x_2 + 900x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6 - \mathrm{M} \cdot \lambda_1 - \mathrm{M} \cdot \lambda_2 - \mathrm{M} \cdot \lambda_3 - \mathrm{M} \cdot \lambda_4}$$

el valor de la misma para la primera solución es $f = -75000\mathrm{M}$

Completaremos ahora la tabla con los z_j y $z_j - c_j$ para resolver las etapas del simplex.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	**solución**	c_k
	0.4	0.3	0.1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20000	$\lambda_1 = 20000$	-M
	0.4	0.3	0.1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	30000	$s_2 = 30000$	0
	0.3	0.1	0.2	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	10000	$\lambda_2 = 10000$	-M
	0.2	0.2	0.4	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	25000	$\lambda_3 = 25000$	-M
	0.1	0.4	0.3	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	20000	$\lambda_4 = 20000$	-M
	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	100000	$s_6 = 100000$	0
c_j	1200	700	900	0	0	0	0	0	0	-M	-M	-M	-M	f		
z_j	-M	-M	-M	M	0	M	M	M	0	-M	-M	-M	-M	-75000M		
$z_j - c_j$	-M-1200	-M-700	-M-900	M	0	M	M	M	0	0	0	0	0			

↑ entra x_1, sale λ_2, pues siendo M un número positivo muy grande, éste es el valor $z_j - c_j$ más negativo (prob. de Max.)

Sale λ_2 pues analizamos la primer columna buscando el elemento pivote, θ mínimo positivo de los cocientes $b_i / a_{i,1}$ con $i = 1,2,3,4,5,6$.

Resulta el elemento pivote $a_{3,1} = 0.3$. Para efectuar las operaciones a partir de un pivote unitario, multiplicamos la tercer fila por (1/0.3)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	**sol.**	c_k
$F_{1,3(-4/3)} \rightarrow$	0	1/6	-1/6	-1	0	4/3	0	0	0	1	-4/3	0	0	20000/3	λ_1	-M
$F_{2,3(-4/10)} \rightarrow$	0	1/6	-1/6	0	1	4/3	0	0	0	0	-4/3	0	0	50000/3	s_2	0
	1	1/3	2/3	0	0	-10/3	0	0	0	0	10/3	0	0	10000/3	x_1	1200
$F_{4,3(-2/10)} \rightarrow$	0	2/15	4/15	0	0	2/3	-1	0	0	0	-2/3	1	0	55000/3	λ_3	-M
$F_{5,3(-1/10)} \rightarrow$	0	11/30	7/30	0	0	1/3	0	-1	0	0	-1/3	0	1	50000/3	λ_4	-M
$F_{6,3(-1)} \rightarrow$	0	2/3	1/3	0	0	10/3	0	0	1	0	-10/3	0	0	200000/3	s_6	0
$F_{7,3(-1200)} \rightarrow$	0	300	100	0	0	4000	0	0	0	-M	-4000-M	-M	-M	$f - 4\text{x}10^7$		
z_j	1200	400-2/3M	800-1/3M	M	0	-4000-7/3M	M	M	0	-M	4000+7/3M	-M	-M	$4\text{x}10^7$-125000/3M		
$z_j - c_j$	1200	100-2/3M	700-1/3M	M	0	-8000-7/3M	M	M	0	0	8000+7/3M	0	0			

↑ entra s_3, sale λ_1

La segunda solución factible es: $\lambda_1 = 20000/3$; $\lambda_3 = 55000/3$; $\lambda_4 = 50000/3$; $s_2 = 50000/3$; $s_6 = 200000/3$; $x_1 = 100000/3$; las restantes son nulas.
Analizada la sexta columna indicada, se elige el elemento pivote $a_{1,6} = 4/3$, por corresponderle el mínimo $b_i / a_{i,6}$ no negativo.

Multiplicamos la primera fila por (3/4) para que el pivote valga 1. A continuación efectuamos las operaciones del siguiente paso.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	sol.	c_k
	0	1/8	-1/8	-3/4	0	1	0	0	0	3/4	-1	0	0	5000	s_3	0
$F_{2,1(-4/3)}\rightarrow$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	10000	s_2	0
$F_{3,1(10/3)}\rightarrow$	1	3/4	1/4	-5/2	0	0	0	0	0	5/2	0	0	0	50000	x_1	1200
$F_{4,1(-2/3)}\rightarrow$	0	1/20	7/20	1/2	0	0	-1	0	0	-1/2	0	1	0	15000	λ_3	-M
$F_{5,1(-1/3)}\rightarrow$	0	13/40	11/40	1/4	0	0	0	-1	0	-1/4	0	0	1	15000	λ_4	-M
$F_{6,1(-10/3)}\rightarrow$	0	1/4	3/4	5/2	0	0	0	0	1	-5/2	0	0	0	50000	s_6	0
$F_{7,1(-4000)}\rightarrow$	0	-200	600	3000	0	0	0	0	0	-3000-M	-M	-M	-M	f - $6x10^7$		
z_j	1200	900-3/8M	300-5/8M	3000-3/4M	0	0	M	M	0	3000+3/4M	0	-M	-M	$6x10^7$-30000M		
$z_j - c_j$	1200	1100-3/8M	-300-5/8M	-6000-3/4M	0	0	M	M	0	6000+7/4M	M	0	0			

↑ entra s_1, sale s_2

La tercera solucion factible es: λ_3 = 15000; λ_4 = 15000; s_2 = 10000; s_3 = 5000; s_6 = 50000; x_1 = 50000; las restantes son nulas.
Analizada la cuarta columna indicada, se elige el elemento pivote $a_{2,4}$ = 1, por corresponderle el mínimo b_i / $a_{i,4}$ no negativo.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	sol.	c_k
$F_{1,2(3/4)}\rightarrow$	0	1/8	-1/8	0	3/4	1	0	0	0	0	-1	0	0	12500	s_3	0
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	10000	s_1	0
$F_{3,2(5/2)}\rightarrow$	1	3/4	1/4	0	5/2	0	0	0	0	0	0	0	0	75000	x_1	1200
$F_{4,2(-1/2)}\rightarrow$	0	1/20	7/20	0	-1/2	0	-1	0	0	0	0	1	0	10000	λ_3	-M
$F_{5,2(-1/4)}\rightarrow$	0	13/40	11/40	0	-1/4	0	0	-1	0	0	0	0	1	12500	λ_4	-M
$F_{6,2(-5/2)}\rightarrow$	0	1/4	3/4	0	-5/2	0	0	0	1	0	0	0	0	25000	s_6	0
$F_{7,2(-3000)}\rightarrow$	0	-200	600	0	-3000	0	0	0	0	-M	-M	-M	-M	f - $9x10^7$		
z_j	1200	900-3/8M	300-5/8M	0	3000+3/4M	0	M	M	0	0	0	-M	-M	$9x10^7$-22500M		
$z_j - c_j$	1200	1100-3/8M	-300-5/8M	0	6000+3/4M	0	M	M	0	M	M	0	0			

↑ entra x_3, sale λ_3

La cuarta solucion factible es: λ_3 = 10000; λ_4 = 12500; s_1 = 10000; s_3 = 12500; s_6 = 25000; x_1 = 75000; las restantes son nulas.
Analizada la tercera columna indicada, se elige el elemento pivote $a_{4,3}$ = 7/20. Multilicamos la fila 4 por (20/7) $\Rightarrow$ pivote es 1.

Realizamos a continuación las operaciones que corresponden.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	sol	c_k
$F_{1,4(1/8)} \rightarrow$	0	1/7	0	0	4/7	1	-5/14	0	0	0	-1	5/14	0	112500/7	s_3	0
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	10000	s_1	0
$F_{3,4(-1/4)} \rightarrow$	1	5/7	0	0	20/7	0	5/7	0	0	0	0	-5/7	0	475000/7	x_1	1200
	0	1/7	1	0	-10/7	0	-20/7	0	0	0	0	20/7	0	200000/7	x_3	900
$F_{5,4(-11/40)} \rightarrow$	0	2/7	0	0	1/7	0	11/14	-1	0	0	0	-11/14	1	32500/7	λ_4	-M
$F_{6,4(-3/4)} \rightarrow$	0	1/7	0	0	-10/7	0	15/7	0	1	0	0	-15/7	0	25000/7	s_6	0
$F_{7,4(-600)} \rightarrow$	0	-2000/7	0	0	-15000/7	0	12000/7	0	0	-M	-M	-12000/7-M	-M	f - 75/7x10^7		
z_j	1200	6900/7-2/7M	900	0	1500/7-1/7M	0	-12000/7-11/14M	M	0	0	0	12000/7+11/14M	-M	75/7x10^7-32500/7M		
$z_j - c_j$	1200	8900/2-2/7M	900	0	1000/7-1/7M	0	-24000/7-11/14M	M	0	M	M	24000/7+25/14M	0			

↑ entra s_4, sale s_6

La quinta solución factible es: λ_4 = 32500/7; s_1 = 10000; s_3 = 112500/7; s_6 = 25000/7; x_1 = 475000/7; ; x_3 = 200000/7, las restantes son nulas.
Analizada la séptima columna indicada, se elige el elemento pivote $a_{6,7}$ = 15/7. Multilicamos la fila 6 por (7/15) ⇒ pivote es 1.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	sol	c_k
$F_{1,6(5/14)} \rightarrow$	0	1/6	0	0	1/3	1	0	0	1/6	0	-1	0	0	50000/3	s_3	0
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	10000	s_1	0
$F_{3,6(-5/7)} \rightarrow$	1	2/3	0	0	10/3	0	0	0	-1/3	0	0	0	0	200000/3	x_1	1200
$F_{4,6(20/7)} \rightarrow$	0	1/3	1	0	-10/3	0	0	0	4/3	0	0	0	0	100000/3	x_3	900
$F_{5,6(-11/14)} \rightarrow$	0	7/30	0	0	2/3	0	0	-1	-11/30	0	0	0	1	10000/3	λ_4	-M
	0	1/15	0	0	-2/3	0	1	0	7/15	0	0	-1	0	5000/3	s_4	0
$F_{7,6(-12000/7)}$	0	-400	0	0	-1000	0	0	0	-800	-M	-M	-M	-M	f - 11x10^7		
z_j	1200	1100-7/30M	900	0	1000-2/3M	0	0	M	800-11/30M	0	0	0	-M	11x10^7-10000/3M		
$z_j - c_j$	1200	1500-7/30M	900	0	2000-2/3M	0	0	M	1600+11/30M	M	M	M	0			

↑ entra s_2, sale λ_4

La sexta solucion factible es: λ_4 = 10000/3; s_1 = 10000; s_3 = 50000/3; s_4 = 5000/3; x_1 = 200000/3; x_3 = 100000/3, las restantes son nulas.
Analizada la quinta columna indicada, se elige el elemento pivote $a_{5,5}$ = 2/3. Multilicamos la fila 5 por (3/2) ⇒ pivote es 1.

Realizamos las operaciones que siguen.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	b_k	sol	c_k
$F_{1,5(-1/3)} \rightarrow$	0	1/20	0	0	0	1	0	1/2	7/20	0	-1	0	-1/2	15000	s_3	0
$F_{2,5(-1)} \rightarrow$	0	-7/20	0	1	0	0	0	3/2	11/20	-1	0	0	-3/2	5000	s_1	0
$F_{3,5(-10/3)} \rightarrow$	1	-1/2	0	0	0	0	0	5	3/2	0	0	0	-5	50000	x_1	1200
$F_{4,5(10/3)} \rightarrow$	0	3/2	1	0	0	0	0	-5	-1/2	0	0	0	5	50000	x_3	900
	0	7/20	0	0	1	0	0	-3/2	-11/20	0	0	0	3/2	5000	s_2	0
$F_{6,5(2/3)} \rightarrow$	0	3/10	0	0	0	0	1	-1	1/10	0	0	-1	1	5000	s_4	0
$F_{7,5(1000)} \rightarrow$	0	-50	0	0	0	0	0	-1500	-1350	-M	-M	-M	1500-M	f - 105x10^6		
z_j	1200	750	900	0	0	0	0	1500	1350	0	0	0	-1500	105x10^6		
$z_j - c_j$	1200	800	900	0	0	0	0	3000	2700	M	M	M	M-3000			

No hay ningún $z_j - c_j$ menor que cero, teniendo en cuenta que M tiene un valor muy grande. No hay, entonces, indicador que provoque el cambio de base, por lo tanto, finaliza el proceso iterativo. El funcional no puede mejorarse.

La séptima solucion factible, y última, es: s_1 = 5000; s_2 = 5000; s_3 = 15000; s_4 = 5000; x_1 = 50000; x_3 = 50000, las restantes variables son nulas.
Le corresponde un valor en la funcional $\boxed{f = 1200x_1 + 700x_2 + 900x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6 - \mathrm{M}\cdot\lambda_1 - \mathrm{M}\cdot\lambda_2 - \mathrm{M}\cdot\lambda_3 - \mathrm{M}\cdot\lambda_4 = 105\times10^6}$

Constatamos que la cantidad de productos destilados a producir verifique las inecuaciones:

Nafta $0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 = 0.4\cdot50000 + 0.3\cdot0 + 0.1\cdot50000 = 25000$ (verifica la primera y la segunda inecuación).
Kerosene $0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 = 0.3\cdot50000 + 0.1\cdot0 + 0.2\cdot50000 = 25000 \geq 10000$
Gas oil $0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 = 0.2\cdot50000 + 0.2\cdot0 + 0.4\cdot50000 = 30000 \geq 25000$
Fuel oil $0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 = 0.1\cdot50000 + 0.4\cdot0 + 0.3\cdot50000 = 20000 \geq 20000$
Además, por almacenaje $x_1 + x_2 + x_3 = 1\cdot50000 + 1\cdot0 + 1\cdot50000 = 100000 \leq 100000$

Respuesta al problema: la mezcla de crudos que maximiza el beneficio está compuesta por 50000 m^3 de los crudos tipo “A” y “C”, sin pedido de “B”, y le corresponde un beneficio de 105000000 $.

PROBLEMA DUAL DEL MÉTODO SIMPLEX

Existe una relación destacable entre los problemas de máximo y mínimo de una programación lineal.
A cada problema de máxima funcional (por ejemplo, beneficios) se asocia un problema de mínima funcional (por ejemplo, costos). Este tipo problema vinculado a uno dado, adopta el nombre de dual. A la inversa, cada problema mínima tiene asociado su dual de máxima.
Esta asociación es útil porque amplía el espectro del problema al razonar dos objetivos aparentemente contrapuestos.

Veamos el siguiente ejemplo. De una fábrica de helados se obtiene la siguiente información tabulada:

Sabor	**Consumo por galón**			**Ganancia por galón**
	Leche (y_1)	**Azucar (y_2)**	**Crema (y_3)**	
Chocolate (x_1)	0.40	0.50	0.10	1.00
Vainilla (x_2)	0.50	0.35	0.15	0.90
Crema rusa (x_3)	0.40	0.40	0.20	0.95
Disponiblilidad	200	150	60	

Sean x_1, x_2 y x_3 los galones por tipo de helado (chocolate, vainilla y crema rusa, respectivamente) producidos. La funcional a <u>maximizar</u> es $f(x_1, x_2, x_3) = 1.00 \cdot x_1 + 0.90x_2 + 0.95x_3$, que representa el beneficio obtenido por la cantidad producida de cada variedad de helado. Está sujeta a las siguientes restricciones, en función de las disponibilidades de los elementos básico de elaboración (lecha, azucar y crema):

$$\begin{cases} 0.40x_1 + 0.50x_2 + 0.40x_3 \le 200 \\ 0.50x_1 + 0.35x_2 + 0.15x_3 \le 150 \\ 0.40x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 \le 60 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

La alternativa de planteo, será minimizar el costo de producción.
Sean y_1, y_2 y y_3 las cantidades de consumo de leche, azucar y crema, respectivamente, correpondientes a cada variedad de helado. La funcional a <u>minimizar</u> es $g(y_1, y_2, y_3) = 200 \cdot y_1 + 150y_2 + 60y_3$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0.40y_1 + 0.50y_2 + 0.40y_3 \ge 1.00 \\ 0.50y_1 + 0.35y_2 + 0.40y_3 \ge 0.90 \\ 0.40y_1 + 0.15y_2 + 0.20y_3 \ge 0.95 \\ y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

CONSIDERACIONES GENERALES DEL PROBLEMA DUAL

En general, los problemas duales presentan las siguientes características.

(I) Maximizar $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ sujeto a

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \le b_2 \\ \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad \le \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \cdots; x_n \ge 0 \end{cases}$$

(II) Minimizar $g(y_1, y_2, \cdots, y_m) = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + \cdots + b_m y_m = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j$ sujeto a

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{2,1}y_2 + \cdots + a_{n,1}y_m \geq c_1 \\ a_{1,2}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{n,2}y_m \geq c_2 \\ \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad \geq \vdots \\ a_{1,n}y_1 + a_{2,n}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_m \geq c_n \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; \cdots; y_m \geq 0 \end{cases}$$

1ero. Si el problema de máximo planteado consiste en m desigualdades con n incógnitas (I) $\Rightarrow$el problema dual de mínimo involucra n desigualdades con m incógnitas (II).

2do. La matriz de los coeficientes de las desigualdades en (I) es una matriz A = $((a_{i,j}))$, de orden mxn, en cambio en (II) es la matriz $A^T = ((a_{j,i}))$, de orden nxm.

3ero. Los elementos del vector $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ del problema (I), son los indicadores de la funcional del dual correspondiente (II).

4to. Los elementos del vector $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ de (II), son los indicadores de la funcional de (I).

5to. Sea *f* la funcional de un problema de máximo de programación lineal y sea *g* la funcional del correspondiente problema dual de mínimo, entonces *f* tiene un máximo si y sólo si *g* tiene un mínimo.
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ es solución óptima de *f* y $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ es solución óptima de *g* si y sólo si son soluciones óptimas de ambos problemas verificándose que $f(\xi) = g(\sigma)$. Esto significa que *f* evaluada en $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ es igual a *g* evaluada en $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Autor: Ing. Enrique Marcaccio
Colaboradores: Lic. Julia E. Contin
Ing. Patricio Meneguzzo

Haedo, Julio 1995