UNIDAD Nº: 5 - CONICAS

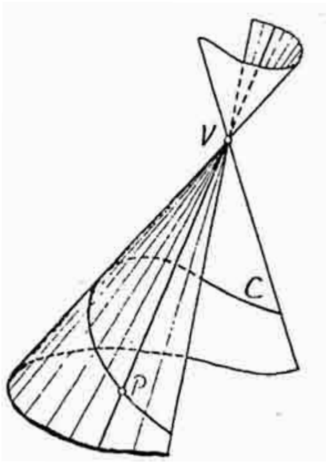
<u>Definición:</u> Se llama ecuación de segundo grado en dos variables, a toda expresión de la forma:

$$a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2.a_{13}.x + 2.a_{23}.y + a_{33} = 0$$

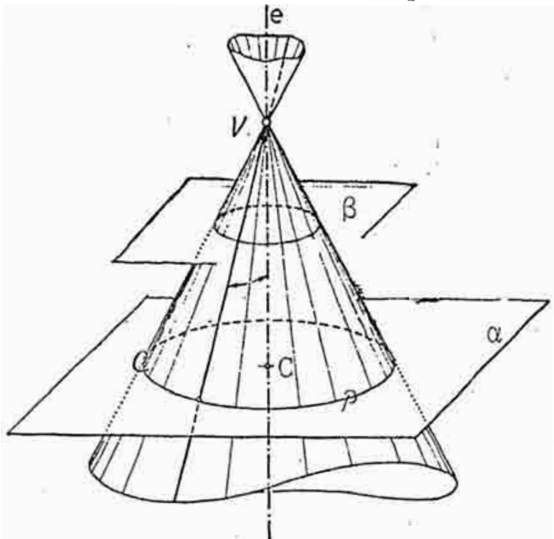
con: $\forall\ a_{ij} \in R$ con $i \in I$ y $j \in I \ \wedge\ (a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0)$

Las ecuaciones que responden a esta forma, se llaman cónicas, porque su estudio se originó en el análisis de las diferentes posibles intersecciones de un plano con una superficie cónica circular.

<u>Definición:</u> Dada una curva C, y un punto V, no perteneciente a la misma, se llama **superficie cónica** al conjunto de rectas que pasan por V y tienen un punto en común con la curva C.

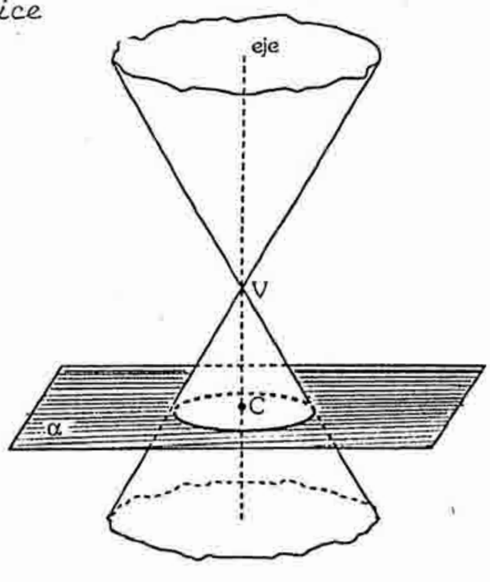


<u>Definición:</u> Si la curva C está incluida en un plano y es una circunferencia con centro en C y el punto vértice V, está sobre la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la circunferencia, no coincide con C, entonces la superficie se llama **superficie cónica circular recta.** Las rectas determinadas por un punto de la circunferencia y el vértice V, se denominan "generatrices". La recta perpendicular al palno que pasa por V, es el "eje" de la superficie cónica y el ángulo formada por cada generatriz con el eje se llama abertura de la superficie cónica.



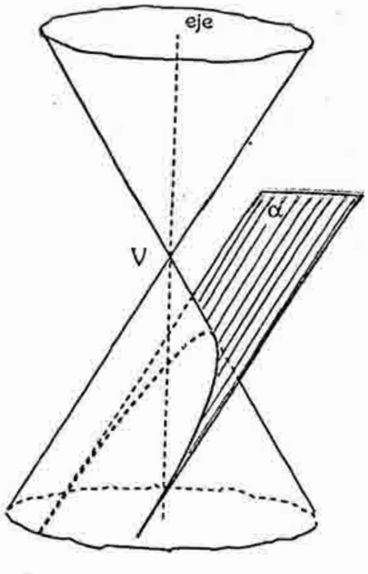
En particular, nos interesan cuatro secciones cónicas:

Sección cónica con un plano perpendicular al eje, que no contiene al vértice



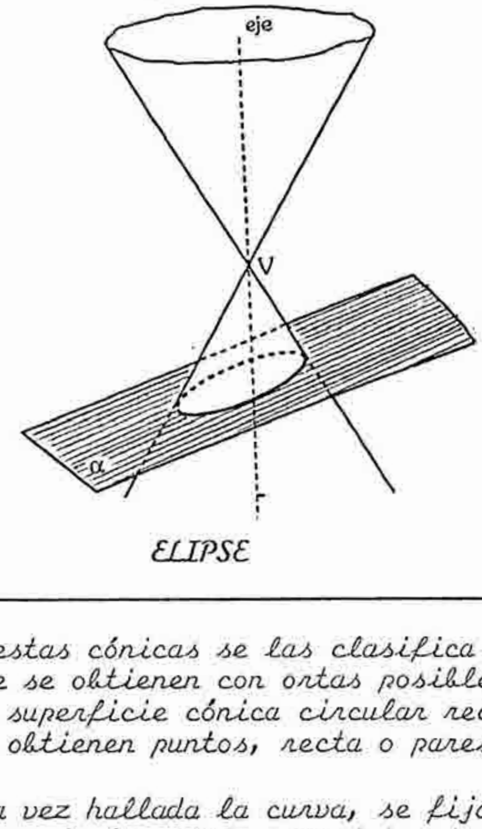
CIRCUNFERENCIA

Sección cónica con un plano paralelo a una de las generatrices y que no la contiene



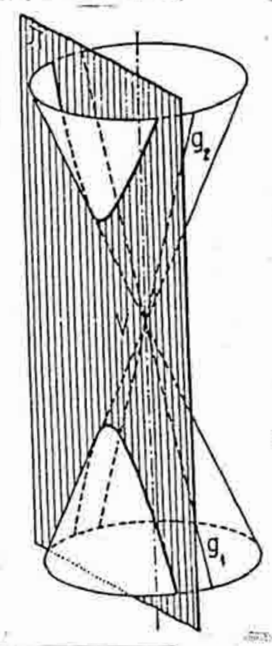
PARABOLA

Sección cónica con un plano que intersecta a todas las generatrices y no es perpendicular al eje del cono



ELIPSE

Sección cónica de un plano paralelo a dos generatrices y que no contiene al vértice



HIPERBOLA

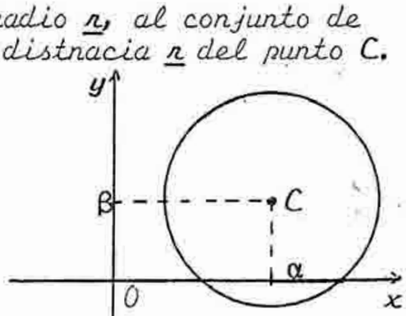
A estas cónicas se las clasifica como cónicas no degeneradas. Las gráficas que se obtienen con ortas posibles posiciones de planos en intersección con la superficie cónica circular recta, son las cónicas degeneradas, ya que se obtienen puntos, recta o pares de rectas.

Una vez hallada la curva, se fija un sistema de ejes de referencia, en el plano de la misma, para determinar mediante condiciones geométricas su ecuación y deducir de las mismas las propiedades de la curva.

CIRCUNFERENCIA

Definición: Se llama circunferencia de centro en C y radio r, al conjunto de puntos del plano, que se encuentran a una distnacia r del punto C.

- Centro: punto $C(\alpha;\beta)$
- Radio: $r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$
- Símbolo: $\mathcal{C}(C, r)$
- Conjunto de puntos: $\mathcal{C}(C, r) = \{P \in \pi \ / \ d(P, C) = r\}$



Ecuaciones de la circunferencia:

- Ecuación vectorial paramétrica: $\vec{CP} \cdot \vec{CP} = r^2$

- Ecuación cartesiana: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

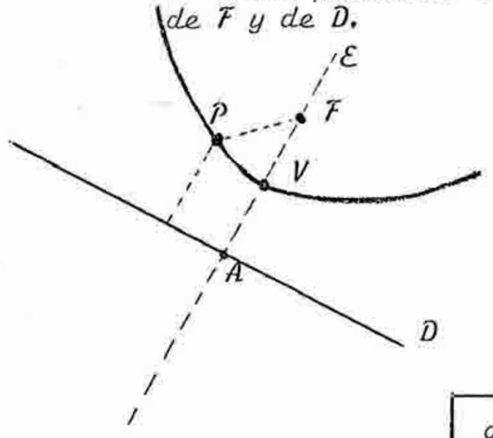
- Ecuación cartesiana paramétrica: $A.x^2 + C.y^2 + D.x + \mathcal{E}.y + \mathcal{F} = 0$ con
  (Ecuación general implícita) $A = C \neq 0 \ \wedge \ D^2 + \mathcal{E}^2 - 4.A.\mathcal{F} > 0$

- Ecuación polar: $\rho^2 + \rho_0^2 - 2.\rho.\rho_0.\cos(\phi - \phi_0) = r^2$

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha + r \cdot \cos\theta \\ y = \beta + r \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

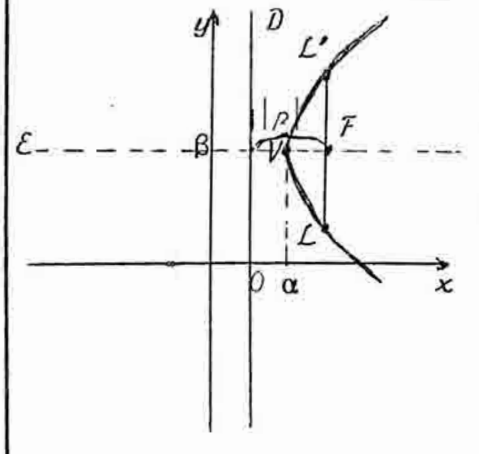
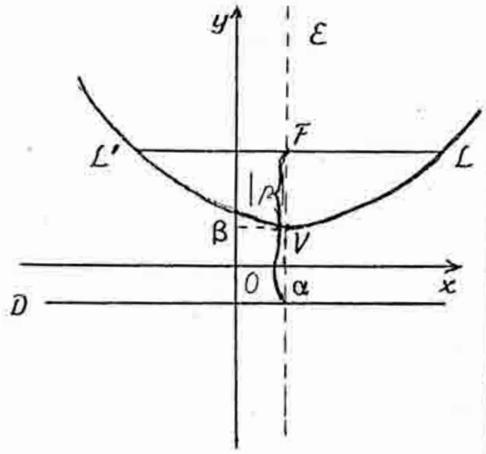
PARABOLA

Definición: Dada una recta D, y un punto $\mathcal{F}$, no perteneciente a la misma, se llama parábola, al conjunto de puntos del plano que equidistan de $\mathcal{F}$ y de D.



$\mathcal{F}$: foco
D: directriz
$\mathcal{E}$: eje ($\mathcal{E} \perp D \ \wedge \ \mathcal{F} \in \mathcal{E}$)
$\mathcal{E} \cap D = \{A\}$
V: vértice (punto medio de $\mathcal{F}A$)
p: parámetro ("p": distancia de la directriz al foco)

$$\boxed{d(P;D) = d(P;\mathcal{F})}$$

Ecuación	$(y - \beta)^2 = 2.p.(x - \alpha)$	$(x - \alpha)^2 = 2.p.(y - \beta)$
Observación	de eje horizontal	de eje vertical
Vértice	$V(\alpha;\beta)$	$V(\alpha;\beta)$
Foco	sobre la recta: $y = \beta$ $\mathcal{F}(\alpha+p/2;\beta)$	sobre la recta $x = \alpha$ $\mathcal{F}(\alpha;\beta+p/2)$
Representación gráfica		
Directiz	$x = \alpha - p/2$	$y = \beta - p/2$
Eje	$y = \beta$	$x = \alpha$
Lado recto	$LL' = \lvert 2.p \rvert$	$LL' = \lvert 2.p \rvert$

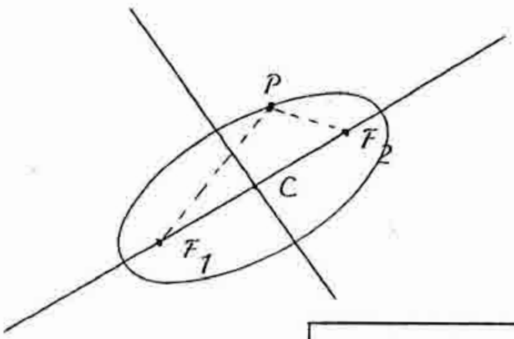
Definición: Se llama **directriz**, a la recta perpendicular al eje, cuyos puntos verifican que la distancia de cualquier punto de la parábola al foco y la distancia a la directriz, determinan una razón positiva (excentricidad).

Definición: Se llama **lado recto**, a la cuerda perpendicular al eje, que pasa por el foco.

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha + p/2 \, . \, \operatorname{cotg}^2 t \\ y = \beta + p \, . \, \operatorname{cotg} t \end{cases}$

ELIPSE

Definición: Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 y un número real "a", tal que $2.a > 2.c$ y $2.c = d(F_1;F_2)$, se llama **elipse**, al conjunto de puntos del plano, tales que la suma de sus distnacias a F_1 y F_2 es constante e igual a: $2.a$.



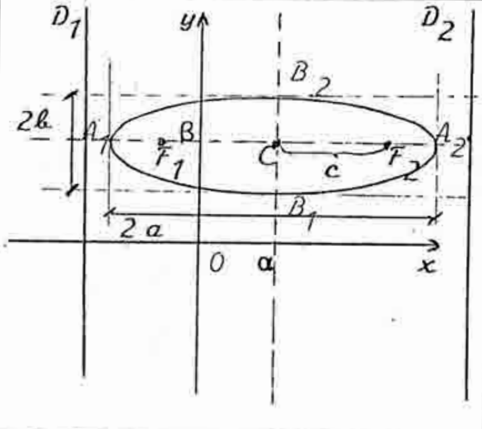
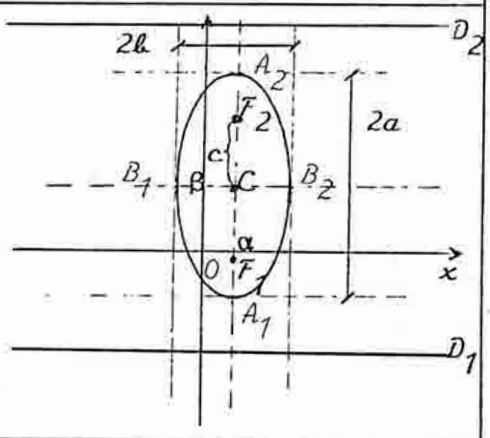
F_1 y F_2: focos

$2.c = d(F_1;F_2)$: distancia focal

C: centro de la elipse

C: punto medio de F_1F_2

$$\boxed{d(F_1;P) + d(F_2;P) = 2.a}$$

Ecuación	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$
Observación	focos sobre una recta paralela al eje "x"	focos sobre uns recta paralela al eje "y"
Centro	$C(\alpha;\beta)$	$C(\alpha;\beta)$
Representación gráfica		
Semieje mayor	a	a
Semieje menor	b	b
Semidistancia focal	c	c
Excentricidad	$e = c/a < 1$	$e = c/a < 1$
Focos	$F_1(\alpha-c;\beta)$ $F_2(\alpha+c;\beta)$	$F_1(\alpha;\beta-c)$ $F_2(\alpha;\beta+c)$

Relaciones	$a > b \wedge b^2 = a^2 - c^2$	
Vértices	$A_1(\alpha-a;\beta)$ $A_2(\alpha+a;\beta)$ $B_1(\alpha;\beta-b)$ $B_2(\alpha;\beta+b)$	$A_1(\alpha;\beta-a)$ $A_2(\alpha;\beta+a)$ $B_1(\alpha-b;\beta)$ $B_2(\alpha+b;\beta)$
Lado recto	$LL' = 2.b^2/a$	$LL' = 2.b^2/a$
Directrices	D_1: $x = \alpha - a/e$ D_2: $x = \alpha + a/e$	D_1: $y = \beta - a/e$ D_2: $y = \beta + a/e$

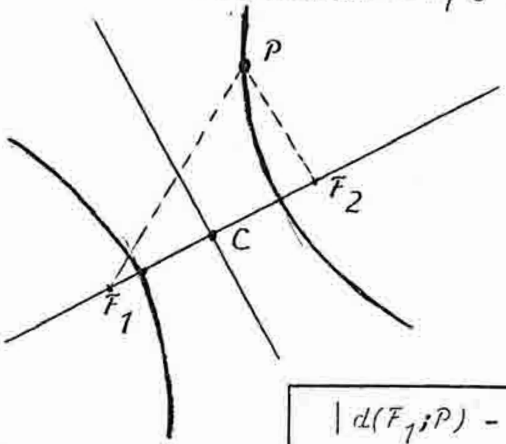
Definición: Se llama **lado recto**, a cada una de las cuerdas perpendiculares al eje mayor, que pasan por los focos.

Definición: Se llaman **directrices**, a las rectas perpendiculares al eje focal, cuyos puntos verifican que la distancia de cualquier punto de la elipse a cada uno de los focos y la distancia a la correspondiente directriz, determinan una razón positiva (excentricidad).

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha + a \cdot \cos t \\ y = \beta + b \cdot \text{sen } t \end{cases}$

HIPERBOLA

Definición: Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 y un número real "**a**", tal que $2.a < 2.c$ y $2.c = d(F_1;F_2)$, se llama **hipérbola**, al conjunto de puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a F_1 y F_2 es constante e igual a: **2.a**.



F_1 y F_2: focos

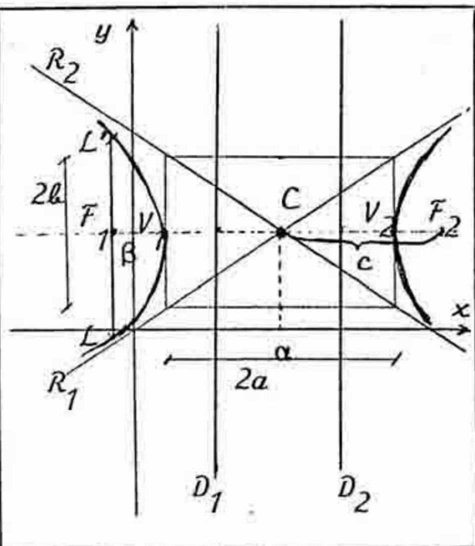
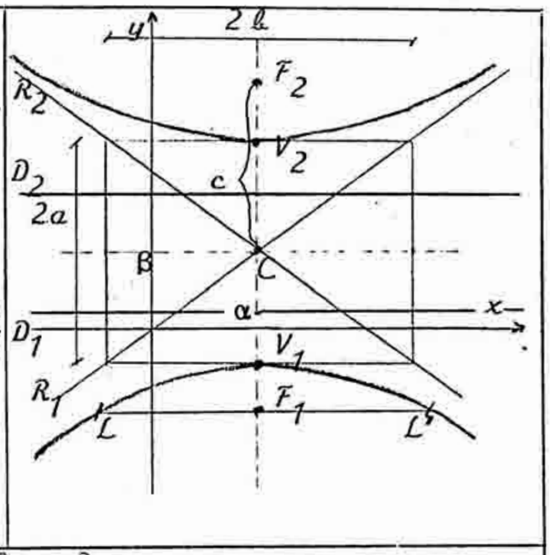
$2.c = d\ (F_1;F_2)$: distancia focal

C: centro de la hipérbola

C: punto medio de F_1F_2

$$\boxed{|d(F_1;P) - d(F_2;P)| = 2.a}$$

Ecuación	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$
Observación	focos sobre una recta paralela al eje "x"	foco sobre una recta paralela al eje "y"
Centro	$C(\alpha;\beta)$	$C(\alpha;\beta)$
Semieje focal	a	a
Semieje transverso	b	b
Semidistancia focal	c	c

Representación gráfica		
Relaciones	$a \gtrless b \wedge b^2 = c^2 - a^2$	
Excentricidad	$e = c/a > 1$	$e = c/a > 1$
Focos	$F_1(\alpha - c; \beta)$ $F_2(\alpha + c; \beta)$	$F_1(\alpha; \beta - c)$ $F_2(\alpha; \beta + c)$
Vértices	$V_1(\alpha - a; \beta)$ $V_2(\alpha + a; \beta)$	$V_1(\alpha; \beta - a)$ $V_2(\alpha; \beta + a)$
Lado recto	$LL' = 2.b^2/a$	$LL' = 2.b^2/a$
Directrices	$D_1: x = \alpha - a/e$ $D_2: x = \alpha + a/e$	$D_1: y = \beta - a/e$ $D_2: y = \beta + a/e$
Asíntotas	$R_1: y - \beta = b/a \cdot (x - \alpha)$ $R_2: y - \beta = -b/a \cdot (x - \alpha)$	$R_1: y - \beta = a/b \cdot (x - \alpha)$ $R_2: y - \beta = -a/b \cdot (x - \alpha)$

Definición: Se llama **lado recto**, a cada una de las cuerdas perpendiculares al eje focal, que pasan por los focos.

Definición: Se llaman **directrices**, a las rectas perpendiculares al eje focal, cuyos puntos verifican que la distancia de cualquier punto de la hipérbola a cada uno de los focos y la distancia a la correspondiente directriz, determinan una razón positiva (excentricidad).

Definición: Se llaman **asintotas** a las rectas cuyos puntos verifican que las ordenadas (abscisas) en valor absoluto resultan mayores que las respectivas ordenadas (abscisas) en valor absoluto de la hipérbola.

Las asíntotas son las rectas a las cuales se aproximan las ramas de la hipérbola pero no se cortan.

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha + a \cdot \sec t \\ y = \beta + b \cdot \operatorname{tg} t \end{cases}$

HIPERBOLA EQUILATERA

Cuando en una hipérbola se verifica que: **$a = b$**, la misma recibe el nombre de **hipérbola equilátera.**

Comunmente se considera que los ejes coordenados coinciden con las asíntotas, entonces su ecuación responde a la forma:

$$x \cdot y = k \qquad \text{con } k \neq 0$$

Si las asíntotas coinciden con rectas paralelas a los ejes coordenados y el origen del nuevo sistema de coordenadas, expresado en función del anterior es **$C(\alpha;\beta)$**, la ecuación de la hipérbola equilátera, responde a:

$$(x - \alpha) \cdot (y - \beta) = k \qquad \text{con } k \neq 0$$

DEFINICION GENERAL DE CONICAS

PARABOLAS - ELIPSES - HIPERBOLAS

Hasta aquí presentamos sólo casos particulares de ecuaciones de cónicas. Teniendo presente las definiciones de **directriz** o **directrices**, es posible observar que siempre existe una razón positiva, determinada por el cociente entre las distancias a un punto fijo y distancia a recta fija, lo cual nos permite enunciar la siguiente definición general de cónicas.

Definición: Dadas una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco) no perteneciente a la misma, se llama **cónica** (parábola - elipse - hipérbola) al lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales se verifica que la razón entre sus distancias al punto fijo y a la recta fija, es una constante positiva "**e**" (excentricidad).

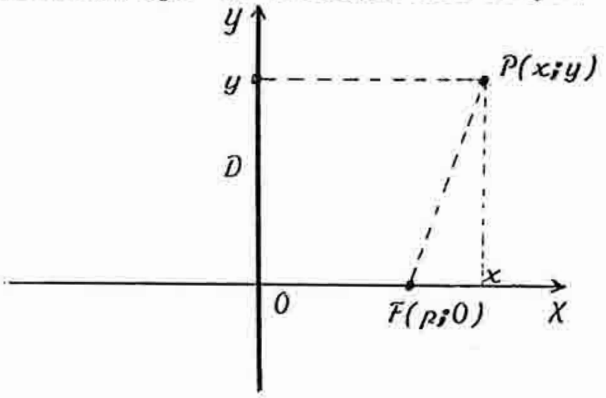
Si consideramos que la recta fija es coincidente con el eje "y" y el punto fijo es un punto perteneciente al eje "x" distinto del origen.

D: directriz

$x = 0$

F: foco

$F(p;0)$



$$\boxed{\frac{d(F;P)}{d(P;D)} = e}$$

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e \rightarrow \frac{(x-p)^2 + y^2}{x^2} = e^2 \rightarrow x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = e^2 \cdot x^2$$

$$\boxed{(1 - e^2) \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x + p^2 = 0}$$

para los diferentes valores de "**e**", es posible obtener distintas cónicas.

Si: **$e = 1$**, la cónica resulta una parábola, para **$e < 1$**, se obtiene una elipse y para **$e > 1$**, la cónica generada es una hipérbola.

Cuando la recta fija y el punto fijo dados no verifican este caso particular, es posible mediante transformaciones previas (rotación y/o traslación) transformar la situación general en esta particular.

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

Su forma es:

$$A.x^2 + B.x.y + C.y^2 + D.x + E.y + F = 0$$

y representa el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya representación es una cónica, un par de rectas o un punto.

Si: $B = 0$, se reduce a: $A.x^2 + C.y^2 + D.x + E.y + F = 0$, y en aquellos casos que representa una cónica, será con centro en el origen o bien desplazado (traslación) y responde a algunos de los casos estudiados anteriormente.

La ecuación general de segundo grado, también puede expresarse como:

$$a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2.a_{13}.x + 2.a_{23}.y + a_{33} = 0$$

donde: $a_{11} = A$; $2.a_{12} = B$; $a_{22} = C$; $2.a_{13} = D$; $2.a_{23} = E$; $a_{33} = F$

por lo cual la ecuación general de segundo grado, puede expresarse en forma matricial mediante:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

o bien:

$$X^t.A.X = 0$$

donde:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Siendo A matriz simétrica.

Por los grados de los términos, la ecuación general de segundo grado admite asociarla en:

$$a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 : \text{Forma cuadrática}$$

$$2.a_{13}.x + 2.a_{23}.y : \text{Forma lineal}$$

$$a_{33} : \text{Término independiente}$$

Al asociar así los términos, también se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 . \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

Llamando:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

es posible escribir:

$$X^t.A_{33}.X + 2.A_3^t.X + a_{33} = 0$$

donde A_{33} también es matriz simétrica.

INVARIANTES

Definición: Se llaman invariantes a aquellas expresiones dependientes de los coeficientes de una ecuación, que permanecen constantes despúes de efectuada una transformación.

Las transformaciones que efectuamos son de rotación y/o traslación con el objetivo que la ecuación general de segundo grado en dos variables, quede reducida a la forma canónica.

En toda ecuación general de segundo grado en dos variables, es posible distinguir tres invariantes:

1) Invariante cúbico: det (A)
2) Invariante cuadrático: det (A_{33})
3) Invariante lineal: tr(A_{33}) (traza de: A_{33})

Mediante una transformación afín ortogonal, es posible expresar la ecuación:

$$X^t.A.X = 0$$

mediante:

$$(X')^t.A'.X' = 0$$

donde: $A' = (B^{-1})^t.A.B^{-1}$, siendo B matriz ortogonal.

Como las transformaciones mantienen invariantes los coeficientes de la ecuación general de segundo grado, se verifica que:

1) $\det(A) = \det(A')$
2) $\det(A_{33}) = \det(A'_{33})$
3) $tr(A_{33}) = tr(A'_{33})$

Para eliminar el término rectángular de la ecuación general de segundo grado en dos variables ($2.a_{12}.x.y$), es necesario efectuar una rotación y luego para eliminar los términos lineales una traslación.

Efectuadas estas transformaciones, la ecuación general de segundo grado queda reducida a la forma canónica:

$$\lambda_1.x^2 + \lambda_2.y^2 + \lambda_3 = 0$$

donde: λ_1 y λ_2 son autovalores de A_{33}.

Si: $\det(A_{33}) \neq 0 \rightarrow \quad \lambda_3 = \dfrac{\det(A)}{\det(A_{33})}$

Si: $\det(A_{33}) = 0$, la ecuación general de segundo grado en dos variables queda reducida a:

$$\lambda_1.x^2 + 2.a'_{23}.y = 0$$

siendo: λ_1: autovalor no nulo de A_{33} y $a'_{23} = \sqrt{-\det(A)/I}$; $I = tr(A_{33})$

Observaciones: 1) Como A_{33} es una matriz simétrica, sus autovalores son reales, como también son los correspondientes a A.

2) Cuando los autovalores de una matriz simétrica, son números reales distintos, los correspondientes subespacios de los autovectores asociados son ortogonales, en consecuencia siempre será posible determinar la matriz de pasaje.

3) Si una matriz admite una matriz de pasaje que la diagonaliza, los vectores columna de la misma, pueden ortonormalizarse, y serán vectores columna de una nueva matriz de pasaje que también diagonaliza a la matriz dada.

4) La matriz B que permite hallar A' que debe ser ortogonal, será la que se obtiene ortonrmalizando los vectores columna de la matriz de pasaje que diagonaliza a A.

CLASIFICACION DE CONICAS SEGUN EL VALOR DE LOS INVARIANTES

1) Si: $\det(A_{33}) = 0$

Cuando: $\det(A) \neq 0$ se obtiene una parábola
$\det(A) = 0$ un par de rectas paralelas

2) Si: $\det(A) \neq 0$ y $\det(A_{33}) \neq 0$, siendo: $tr(A_{33}) = 0$ corresponde a la ecuación de una hipérbola equilátera.

3) Si: $\det(A_{33}) \neq 0$, el análisis se subdivide en:

a) $\det(A_{33}) > 0 \ \wedge \ \det(A) > 0 \ \wedge \ tr(A_{33}) > 0$: elipse imaginaria

b) $\det(A_{33}) > 0 \ \wedge \ \det(A) > 0 \ \wedge \ tr(A_{33}) < 0$: elipse real

c) $\det(A_{33}) > 0 \ \wedge \ \det(A) < 0 \ \wedge \ tr(A_{33}) > 0$: elipse real

d) $\det(A_{33}) > 0 \ \wedge \ \det(A) < 0 \ \wedge \ tr(A_{33}) < 0$: elipse imaginaria

e) $\det(A_{33}) > 0 \ \wedge \ \det(A) = 0$: un par de rectas imaginarias

f) $\det(A_{33}) < 0 \ \wedge \ \det(A) \neq 0$: hipérbola

g) $\det(A_{33}) < 0 \ \wedge \ \det(A) = 0$: un par de rectas reales

-.-

UNIDAD Nº: 5 - TRANSFORMACIONES LINEALES
Trabajo práctico - Tercera parte

1) Completar el siguiente cuadro:

Ecuación general implícita	Ecuación cartesiana	Centro	Radio
$2.x^2 + 2.y^2 - 12.x - 32 = 0$			
	$(x + 3)^2 + y^2 = 4$		
$x^2 + y^2 - 2.x + 4.y = 20$			
$x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$			
	$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$		
		$C(-2;3)$	$r = 5$
		$C(0;-3)$	$r = 3$
$x^2 + y^2 + 3x + y + 9/4 = 0$			

2) Determinar la ecuación de la circunferencia en cada caso y representarla, si:

a) su centro es $C(-3;-5)$ y de radio $r = 7$.

b) los extremos de un diámetro son los puntos $A(2;3)$ y $B(-4;5)$.

c) con centro en $C(7;-6)$ y pasa por el punto $P(2;2)$.

d) con centro en $C(2;-4)$ y es tangente al eje "y".

e) con centro en $C(0;-2)$ y es tangenete a la recta R: $5x - 12y + 2 = 0$.

3) Para cada una de las ecuaciones implícitas dadas, determinar si su representación corresponde a una circunferencia y en caso afirmativo, hallar las coordenadas de su centro, determinar su radio y expresar la ecuación en forma matricial:

a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$

b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

4) Demostrar que las circunferencias: $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y la circunferencia: $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$, son concéntricas.

5) Hallar en cada caso la ecuación de la parábola y representarla, si:

a) La directriz es: D: $y - 1 = 0$ y su foco es el punto $F(4;-3)$.

b) Con vértice en $V(2;3)$ y foco $F(6;3)$.

c) Con vértice en $V(-1;2)$, eje paralelo al eje "y" y $p = -8/3$.

d) Tiene eje paralelo al eje "y", vértice $V(0;-6)$ y pasa por el punto $P(6;-3)$.

e) Lado recto: $LL' = 6$, pasa por $Q(0;8)$, vértice sobre la recta $y = 2$ y de eje paralelo al eje "y".

f) Pasa por los puntos $A(4;4)$ y $B(10;10)$ y la tangente en el vértice es la recta: R: $y - 2 = 0$.

6) Dadas las ecuaciones de las parábolas, determinar sus elementos, representarla y expresarla en forma matricial:

a) $4y^2 - 48x - 20y = 71$

b) $4x^2 + 48y + 12x = 159$

c) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$ d) $y^2 + 4x = 7$

7) Hallar las ecuaciones de las elipses con centro en el origen y:

a) sus focos son $F_1(-2;0)$ y $F_2(2;0)$ y de excentricidad igual a: 2/3.

b) los focos son: $F_1(0;-3)$ y $F_2(0;3)$ y la longitud de cada lado recto es igual a: 9.

c) uno de sus vértices es el punto $(0;-7)$ y pasa por el punto $P(\sqrt{5};14/3)$.

Representar cada una de las ecuaciones de las elipses halladas.

8) Determinar en cada caso la ecuación de la elipse y representarla, si:

a) tiene centro en $C(2;-3)$, su eje mayor tiene longitud igual a 10, de excentricidad igual a 3/5 y el eje focal paralelo al eje "x".

b) la distancia entre las directrices es de: 32/3, con excentricidad igual a: 3/4 y el eje focal paralelo al eje "y".

c) dos de sus vértices son $V_1(-3;7)$ y $V_2(-3;-1)$ y la longitud de cada lado recto es igual a: 2.

9) Un punto P, se mueve de tal manera que el cuadrado de su distnacia al punto $P_0(1;2)$, es siempre igual al dobel de su distnacia a la recta: $R: 3x + 4y - 9 = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descripto por el punto P.

10) Dadas las ecuaciones de las elipses, determinar sus elementos, representarlas y expresar sus ecuaciones en forma matricial:

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$ b) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$ d) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

11) Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distnacia al eje "y" es siempre igual al doble de su distancia al punto $M(3;2)$.

12) Obtener para cada uno de los siguientes casos, la ecuación de la hipérbola y representarla:

a) tiene por vértices a los puntos $V_1(-2;0)$ y $V_2(2;0)$ y sus focos son $F_1(-3;0)$ y $F_2(3;0)$.

b) Los extremos del eje conjugado son los puntos $F_1(0;-3)$ y $F_2(0;3)$ y la longitud de cada lado recto es 6.

c) los vértices son $V_1(-1;3)$ y $V_2(3;3)$ y su excentricidad es: 3/2.

d) el centro es $C(4;5)$, uno de sus focos es $(8;5)$ y su excentricidad es igual a: 2.

13) Para cada una de las siguientes ecuaciones correspondientes a las diferentes hipérbolas, destacar sus elementos, representarlas y expresarlas en forma matricial:

a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$ b) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$ d) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$

e) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

14) Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distnacia al punto $P(3;2)$, es siempre igual al triple de su distancia a la recta: $R: y + 1 = 0$.

15) Teniendo en cuenta la definición general de cónica, determinar para cada uno de los siguientes casos, la ecuación de la cónica respectiva, identificarla y representarla, si:

a) Foco: $F(0;0)$ directriz: $D: x+2y+2 = 0$ excentricidad: $e = 1$.

b) Foco: $F(1;-2)$ directriz: $D: x-2y = 0$ excentricidad: $e = \sqrt{5}/3$.

c) Foco: $F(-1;-1)$ directriz: $D: 4x+3y = 12$ excentricidad: $e = 5$.

d) Foco: $F(3;3)$ directriz: $D: x+3y = 3$ excentricidad: $e = 2$.

e) Foco: $F(1;-3)$ directriz: $D: 3x+y-3 = 0$ excentricidad: $e = \sqrt{10}/4$.

16) Para cada una de las siguientes ecuaciones se pide:

i) Identificar la forma cuadrática, la lineal y el término independiente.

ii) Expresarla en forma matricial (Recuerde: $X^t.A_{33}.X + 2.A_3^t.X + a_{33} = 0$)

iii) Determinar los autovalores correspondientes a A_{33} y la correspondiente matriz que la diagonaliza ortonormalmente y aplicar estos resultados para expresar la ecuación en un nuevo sistema de ejes (X', Y'). (Rotación de ejes).

iv) Escribir la ecuación anterior en un nuevo sistema (X'', Y''), donde se eleminan los términos lineales. (Traslación de ejes).

v) Reconocer los invariantes.

vi) Representar la cónica.

a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

b) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$

d) $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

f) $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$

g) $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0$

h) $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

i) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$

j) $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$

k) $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$

l) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

m) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$

n) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

ñ) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

o) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y = -36$

p) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

-.-