U.T.N. Facultad Regional Haedo

TEMAS DE ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA:

Autovalores y Autovectores

Dada una transformación lineal $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n} \,/\, f(X) = A \cdot X$ donde $A \in \mathbf{R^{n \times n}}$ es la matriz asociada a la transformación en la base canónica de $\mathbf{R^n}$, ¿es posible determinar una base de $\mathbf{R^n}$ distinta de la canónica tal que la matriz asociada a *f* sea diagonal? De ser posible, simplificaría el cálculo en la aplicación de la transformación. ¿Qué condiciones deben verificarse para que dicho cambio de base sea posible? La respuesta no es tan evidente, siendo necesario profundizar el tema.

Sea $\vec{x}$ tal que $A \cdot X = \lambda X$ siendo λ un escalar. Todos los valores de λ que verifiquen la ecuación ($\forall X \neq O$), se llaman autovalores o valores propios de la matriz *A*. Todo vector $\vec{x}$ correspondiente al subespacio de soluciones del sistema $A \cdot X = \lambda X$ para cada autovalor, se llama vector propio o autovector, exceptuando al vector nulo. Indistintamente se hace referencia a los autovalores y los autovectores de la matriz *A* o de la correspondiente transformación lineal *f*.

La ecuación $A \cdot X = \lambda X$ es equivalente a $(A - \lambda I) \cdot X = O$. Si queremos hallar $\vec{x} \neq \vec{0}$, es decir buscamos que el sistema lineal y homogéneo al que conduce la ecuación matricial anterior, tenga soluciones distinta de la trivial, debemos pedir que

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{(ecuación característica de } A\text{).}$$

Se define como polinomio característico de *A* al polinomio de grado *n* y variable λ dado por $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ tal que sus raíces son los autovalores de *A*.

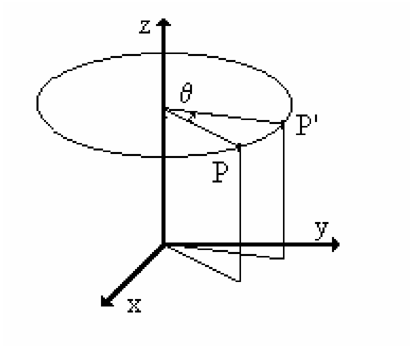
Si λ_i es un autovalor o valor propio de *A*, el subespacio de soluciones del sistema $(A - \lambda_i I) \cdot X = O$ asociado a λ_i dado por

$$S_{\lambda_i} = \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R^n} \,/\, A \cdot X = \lambda_i X \right\}$$

está constituido por la unión del vector nulo y el conjunto de los autovectores asociados a λ_i. S_{λ_i} se llama subespacio asociado a λ_i.

Ejemplos

Ejemplo 1. Una rotación θ de un punto de $\mathbf{R^3}$ alrededor del eje z, $f : P \to P'$:



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

La matriz de rotación correspondiente es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a) Si practicamos una rotación con $\theta = 2\pi$, la matriz asociada a la transformación es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores se determinan a partir la ecuación característica con $\det(A-\lambda I)=0$, $(1-\lambda)^3=0$. Las raíces correspondientes son $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, por lo tanto existe un sólo autovalor $\lambda=1$. El subespacio asociado se obtiene a partir del sistema $(A-1\cdot I)\cdot X=O \Rightarrow O\cdot X=O$, que se cumple $\forall \vec{x}\in \mathbf{R}^3$. Esto es:

$$S_\lambda=\left\{\forall \vec{x}\in \mathbf{R}^3/(A-I)\cdot X=O\right\}=\mathbf{R}^3\text{ ; dim }(S_\lambda)=3$$

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1(1{,}0{,}0)+x_2(0{,}1{,}0)+x_3(0{,}0{,}1)\ \forall x_1,x_2,x_3\in \mathbf{R}.$$

Puede considerarse cualquier base de $\mathbf{R}^3$ como base de S_λ, en particular la canónica, resultando que los autovalores linealmente independientes con el autovalor 1 son:

$$B_{S_\lambda}=\{\vec{u}_1=(1{,}0{,}0);\vec{u}_2=(0{,}1{,}0);\vec{u}_3=(0{,}0{,}1)\}.$$

Todo vector $\vec{x}\neq\vec{0}$ es autovector de A con autovalor 1, es decir que todos los puntos del espacio resultan invariantes cuando se aplica esta rotación, debido a que el transformado de $\vec{x}$ es $1\cdot\vec{x}$.

1.b) Si la rotación fuera $\theta=\pi$, la matriz correspondiente es $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow(-1-\lambda)^2(1-\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=-1\\\lambda_3=1\end{cases}$$ posee dos autovalores diferentes

1.b.I) Si $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

El sistema $(A-\lambda_1 I)\cdot X=O$ es $\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right)$ cuyo conjunto solución está definido por $\begin{cases}\forall x_1\in\mathbf{R}\\\forall x_2\in\mathbf{R}\\x_3=0\end{cases}$.

$$S_{\lambda=-1}=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3/x_3=0\}\Rightarrow(x_1,x_2,0)=x_1(1{,}0{,}0)+x_2(0{,}1{,}0)\ \forall x_1,x_2\in\mathbf{R}\text{ ; dim}(S_{\lambda=-1})=2$$

Los autovectores linealmente independientes para $\lambda=-1$ son

$$B_{S_{\lambda=-1}}=\left\{\vec{u}_1=(1{,}0{,}0);\vec{u}_2=(0{,}1{,}0)\right\}.$$

Esto es que cualquier punto del eje x ó del eje y, tiene por transformado al punto de coordenadas opuestas. Lógicamente cualquier punto del plano (xy) cumple con esta característica.

1.b.II) Si $\lambda_3=1$.

$$(A-\lambda_3 I)\cdot X=O\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$ cuyo conjunto solución está definido por $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\\forall x_3\in\mathbf{R}\end{cases}$.

$$S_{\lambda=1}=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^3/x_1=x_2=0\}\Rightarrow(0,0,x_3)=x_3(0{,}0{,}1)\forall x_3\in\mathbf{R}\text{ ; dim}(S_{\lambda=1})=1.$$

El autovector linealmente independiente para $\lambda=1$ es

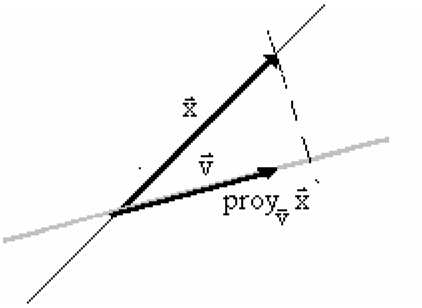
$$B_{S_{\lambda=1}}=\{\vec{u}_3=(0{,}0{,}1)\}.$$

Esto es que los únicos puntos invariantes frente a esta rotación son los ubicados en el eje z. Esto indica que la coordenada z de ningún punto del espacio, variará frente a esta rotación.

Queda como ejercicio las rotaciones en $\pi/2$ y en $\pi/4$. Como paso previo imaginar geométricamente si hay invariantes frente a estas rotaciones y constatar la validez de lo predicho.

Ejemplo 2. Dado un vector no nulo $\vec{v}\in\mathbf{R}^2$ y sea la transformación lineal $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ definida por

$$f(\vec{x})=proy_{\vec{v}}\vec{x}.$$



Recordando que $proy_{\vec{v}}\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \cos(\angle \vec{v},\vec{x})\,\hat{v} = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$, siendo $\vec{x}=(x_1,x_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$, podemos escribir la transformación de la siguiente forma:

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1v_1+x_2v_2}{v_1^2+v_2^2}(v_1,v_2)=\left(\frac{x_1v_1+x_2v_2}{v_1^2+v_2^2}v_1,\frac{x_1v_1+x_2v_2}{v_1^2+v_2^2}v_2\right)$$

o, escrita en forma más conveniente,

$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}x_1+\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}x_2,\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}x_1+\frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}x_2\right).$$

La matriz asociada en la base canónica es $A=\begin{pmatrix}\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}\\ \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}\end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}-\lambda & \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}\\ \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left(\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}-\lambda\right)\left(\frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}-\lambda\right)-\left(\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2=0$$

$$\frac{v_1^2v_2^2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}-\lambda\left(\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}+\frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}\right)+\lambda^2-\left(\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2=0$$

Observamos que la ecuación característica se reduce a: $-\lambda+\lambda^2=0$, cuyas raíces son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=1$.

2.I) Si $\lambda=\lambda_1=0$, el subespacio asociado se obtiene a partir de $(A-0\cdot I)\cdot X=O$, esto es $A\cdot X=O$.

$$\left(\begin{array}{cc:c}\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & 0\\ \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2} & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}v_1^2 & v_1v_2 & 0\\ v_1v_2 & v_2^2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}v_1 & v_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$S_{\lambda=0}=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^2 / x_1v_1+x_2v_2=0\}\text{ ; }\dim(S_{\lambda=0})=1$$

El autovector linealmente independiente es:

$$B_{S_{\lambda=0}}=\{\vec{u}_1=(-v_2,v_1)\}.$$

Obs.: la relación $x_1v_1+x_2v_2=0\Rightarrow\vec{x}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\vec{x}\perp\vec{v}$, por lo tanto el resultado obtenido es compatible con lo esperado geométricamente, puesto que este subespacio representa el conjunto de vectores $\vec{x}$ perpendiculares a $\vec{v}$, cuya proyección sobre $\dot{v}$ se reduce al vector nulo.

2.II) Si $\lambda=\lambda_2=1$, el subespacio asociado se obtiene a partir de $(A-1\cdot I)\cdot X=O$.

$$\left(\begin{array}{cc:c}\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}-1 & \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & 0\\ \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_2^2}{v_1^2+v_2^2}-1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}\frac{-v_2^2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & 0\\ \frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{-v_1^2}{v_1^2+v_2^2} & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}-v_2^2 & v_1v_2 & 0\\ v_1v_2 & -v_1^2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:c}-v_2 & v_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$S_{\lambda=1}=\{\vec{x}\in\mathbf{R}^2 / x_1v_2-x_2v_1=0\}\text{ ; }\dim(S_{\lambda=1})=1$$

El autovector linealmente independiente es:

$$B_{S_{\lambda=1}} = \{\vec{u}_2 = (v_1, v_2)\}.$$

Obs.: la relación $x_1 v_1 - x_2 v_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} \,//\, \vec{v}$, por lo tanto el resultado obtenido es compatible con lo esperado geométricamente, puesto que este subespacio representa el conjunto de vectores $\vec{x}$ paralelos a $\vec{v}$, cuya proyección sobre $\vec{v}$ da por resultado el propio vector $\vec{x}$.

Propiedades de autovalores y autovectores

Dada una matriz A $\in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$,

1) si $\vec{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ es un autovector de *A*, entonces existe para dicho vector un único escalar λ (autovalor) asociado.

2) Si *A* es no singular o regular (es decir, det(A)$\neq$0) y $\lambda\neq 0$ es un autovalor, entonces ($1/\lambda$) es un autovalor de A^{-1} (inversa de *A*).

3) Si *A* es una matriz singular entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de dicha matriz.

4) Si *A* es triangular superior o inferior o diagonal, entonces sus autovalores coinciden con los elementos de la diagonal principal de *A*.

5) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ son los autovalores de *A* $\Rightarrow$ la traza y el determinante de *A* son

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \wedge \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ .$$

6) Si λ es un autovalor de *A* entonces λ^2 es un autovalor de A^2.

7) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ son autovalores distintos (es decir $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$) y si $\{\vec{u}_1\}$ es una base del subespacio de autovectores S_{λ_1}; $\{\vec{u}_2\}$ lo es de S_{λ_2}; $\{\vec{u}_3\}$ lo es de $S_{\lambda_3}; \cdots; \{\vec{u}_n\}$ lo es de S_{λ_n}, entonces el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \cdots, \vec{u}_n\}$ es linealmente independiente.

8) Si λ_i es autovalor de *A* entonces la dimensión del subespacio S_{λ_i} es menor o igual al orden de multiplicidad de la raíz λ_i de la ecuación característica.

Matrices semejantes

Se dice que dos matrices cuadradas *A* y *B* de igual orden, son semejantes si existe una matriz *P*, de igual orden, inversible tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \ .$$

P se denomina matriz de pasaje o de cambio de base; con *A~B* se indica que *A* es semejante a *B*.

Propiedades

1) La semejanza es una relación binaria de equivalencia.

Reflexiva: $A \sim A$

Simétrica: $A \sim B \ \rightarrow \ B \sim A$

Transitiva: Si $A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C$

2) Si $A \sim B \rightarrow \det(A) = \det(B)$

Demostración) Si $A \sim B \rightarrow \ \exists\, P$ inversible / $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, resulta entonces que

$\det(B) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) \rightarrow \det(B) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \rightarrow \det(B) = \det(A)[\det(P^{-1}) \cdot \det(P)] \rightarrow$

$\rightarrow \det(B) = \det(A) \cdot \det(P^{-1} \cdot P) \rightarrow \det(B) = \det(A) \cdot \underbrace{\det I}_{1} \rightarrow \ \boxed{\det(B) = \det(A)}$

3) Si $A \sim B \ \rightarrow \forall k \in \mathbf{N} \ \ A^k \sim B^k$

Demostración) Si $A \sim B \rightarrow \exists\, P$ inversible / $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$B^k = (P^{-1} \cdot A \cdot P)(P^{-1} \cdot A \cdot P)(P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdots (P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot A(P \cdot P^{-1}) \cdot A(P^{-1} \cdot P) \cdot A \cdots A \cdot P$$

$$B^k = P^{-1}(A \cdot I)^k \cdot P = P^{-1} \cdot A^k \cdot P \ \rightarrow \ \boxed{B^k \sim A^k}.$$

4) Si $A \sim B \wedge \det(A) \neq 0 \rightarrow \det(B) \neq 0 \wedge A^{-1} \sim B^{-1}$.

Demostración) Si $A \sim B \rightarrow$ por prop. 2 $\det(B) = \det(A)$ y, siendo $\det(A) \neq 0 \rightarrow \boxed{\det(B) \neq 0}$.

Esto indica que existe la inversa de B.

Como $B = P^{-1} \cdot A \cdot P \rightarrow B^{-1} = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (P^{-1})^{-1}$, esto es $B^{-1} = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P \rightarrow \boxed{A^{-1} \sim B^{-1}}$.

Diagonalización de matrices

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}}$, se dice que es <u>diagonizable</u> si existe P inversible del mismo orden de A (es decir $P \in \mathbf{R}^{\mathbf{n \times n}} \wedge \exists\, P^{-1}$) /

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ matriz diagonal } (A \sim D)$$

Los vectores columna de P corresponden a los autovectores de A y los elementos diagonales λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n de la matriz diagonal D a sus autovalores correspondientes. P resulta la matriz del cambio de base de los autovectores en la base canónica.

<u>Propiedades</u>

1) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ con multiplicidad 1 (esto es $\lambda_i \neq \lambda_j\ \forall i \neq j$) entonces A es diagonizable; el rango de $(A - \lambda_i I) = (n-1)$ y $\dim(S_{\lambda_i}) = 1\ \forall i = 1, 2, ..., n$.

Esta propiedad se puede expresar en forma equivalente de las siguientes formas:

a) si las raíces de la ecuación característica de la matriz $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ son todas simples, entonces A es diagonizable;

b) si la matriz $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ tiene n autovalores λ_i distintos $\rightarrow A$ es diagonizable.

2) Si $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ es diagonizable $\rightarrow \exists\, n$ autovectores que constituyen una base de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

3) Si el orden de multiplicidad de un autovalor λ_i correspondiente a $A \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ es $m(\lambda_i)$, entonces el rango de $(A - \lambda_i I) = [n - m(\lambda_i)]\ \forall i$ para ser diagonizable, esto es que $\dim(S_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)\ \forall i$.

<u>Ejemplos</u>

Ejemplo 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si estudiamos su ecuación característica, $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 = 0$

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, orden de multiplicidad $m(\lambda = 1) = 2$; pero rango $(A - 1.I) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\rightarrow A$ no es diagonizable.

El subespacio asociado al autovalor es $\dim(S_{\lambda=1}) = 2-1 = 1$, no existe un conjunto de 2 autovectores independientes con los cuales hallar la matriz P de cambio de base.

Ejemplo 2. Consideremos la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 (1-\lambda) + (1-\lambda) = 0 \rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i \wedge \lambda_3 = -i.$$

Trabajando sobre el cuerpo de los reales, la matriz A no resulta diagonalizable pues presenta autovalores complejos. Si se extiende al cuerpo de los complejos, entonces como:

para $\lambda_1 = 1 \rightarrow$ autovector $\vec{u}_1 = (0,0,1)$

$\lambda_2 = i \;\rightarrow$ autovector $\vec{u}_2 = (1,-i,1)$

$\lambda_3 = -i \rightarrow$ autovector $\vec{u}_3 = (1,i,0)$

la matriz A es diagonizable tomando $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (U_1\, U_2\, U_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Se verifica:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Si A fuera la matriz de rotación alrededor del eje z:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa la matriz dada en el ejemplo anterior.
Al aplicar la matriz A al vector $\vec{x}$, su imagen es rotada $\pi/2$; esto significa que A^2 representará una rotación de π con respecto al eje z.
Dado que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D \rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1} \rightarrow$

$$A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1})(P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D(\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}) D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

Esto significa que si P diagonaliza a A, también diagonaliza a A^2, y los autovalores de A^2 son λ_i^2 si λ_i es un autovalor de A.

Análogamente para una rotación $\theta = 2\pi$, la matriz de rotación que se obtiene es la matriz identidad.

$$P \cdot D^4 \cdot P^{-1} = A^4 \text{ pero } D^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & i^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^4 \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \rightarrow A^4 = P \cdot D^4 \cdot P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I$$

Matrices Hermíticas

Sea una matriz cuadrada $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{nxn}}$, tal que $\overline{A^T} = A$, entonces A es <u>hermítica</u>.
Notación: $\overline{A}$ matriz cuyos elementos son los conjugados de los correspondientes elementos de A,

$$\text{Si } A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{C}^{\mathbf{n \times n}}, \overline{A} = \left(\left(\overline{a_{i,j}}\right)\right) \in \mathbf{C}^{\mathbf{n \times n}}.$$

<u>Propiedades</u>

1) Si $A = ((a_{i,j})) \in \mathbf{C}^{\mathbf{nxn}}$, esto es que $a_{i,j} \in \mathbf{C}$**,** y además A es hermítica, entonces

$$\begin{cases} a_{i,j} = \overline{a_{j,i}} & i \neq j \\ a_{i,j} \in \mathbf{R} & i = j \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

2) Si todo $a_{i,j} \in A$ es real (es decir $a_{i,j} \in \mathbf{R}$) y la matriz es hermítica$\rightarrow$ la matriz A es <u>simétrica</u>.
3) Todos los autovalores de una matriz hermítica son reales.
4) Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

<u>Ejemplos</u>

a) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & i & -2i \\ -i & 3 & 2i \\ 2i & -2i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & -i & 2i \\ i & 3 & -2i \\ -2i & 2i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\overline{A}\right)^T=\begin{pmatrix} 0 & i & -2i \\ -i & 3 & 2i \\ 2i & -2i & 0 \end{pmatrix}=A \rightarrow A$ es hermítica.

b) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1-i & i \\ 1+i & 1 & 2+\sqrt{2}i \\ -i & 2-\sqrt{2}i & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1+i & -i \\ 1-i & 1 & 2-\sqrt{2}i \\ i & 2+\sqrt{2}i & -1 \end{pmatrix}, (\overline{B})^T=\begin{pmatrix} 2 & 1-i & i \\ 1+i & 1 & 2+\sqrt{2}i \\ -i & 2-\sqrt{2}i & -1 \end{pmatrix}=B$

resultando B hermítica.

Matrices antihermíticas

Si $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ diremos que es antihermítica si $\overline{A}^{\,T}=-A$.

Propiedades

1) Si $A=((a_{i,j})) \in \mathbf{C}^{n\times n}$, si es antihermítica $\rightarrow \begin{cases} a_{i,j} = -\overline{a_{j,i}} & i \neq j \\ a_{i,j} \text{ es imaginario puro } i = j \end{cases}$ $i=1,2,...,n$.

Observación: $z=a+bi$ es imaginario puro si $\text{Re}(z)=a=0$.

2) Si A es antihermítica $\rightarrow$ $(i \cdot A)$ es hermítica. Si A es hermítica $\rightarrow$ $(i \cdot A)$ es antihermítica.

3) Los autovalores de una matriz antihermítica son imaginarios puros (incluyendo cero).

4) Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

5) Si la matriz antihermítica tiene todos los $a_{i,j} \in \mathbf{R}$, resulta antisimétrica.

<u>Ejemplo</u>: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2i \\ -1-i & 3i & 2 \\ 2i & -2 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1+i & -2i \\ -1+i & -3i & 2 \\ -2i & -2 & i \end{pmatrix} \rightarrow -\left(\overline{A}\right)^T=\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2i \\ -1-i & 3i & 2 \\ 2i & -2 & -i \end{pmatrix}=A$.

Matrices unitarias

Si $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ y $\overline{A}^T = A^{-1}$, la matriz A se llama unitaria; en forma equivalente, $\overline{A}^T \cdot A = A \cdot \overline{A}^T = I$.

Propiedades

1) Toda matriz unitaria hace invariantes el producto interior y la norma euclídea.

$\forall X, \forall Y \in \mathbf{C}^{n\times 1}$ se cumple:

a) $\langle A\cdot X, A\cdot Y\rangle = \langle X, Y\rangle$; b) $\|A\cdot X\| = \|X\|$.

2) Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

3) Si $A=((a_{i,j})) / a_{i,j} \in \mathbf{R}$ $\forall i, \forall j=1, ..., n \wedge A$ es unitaria, entonces A es <u>ortogonal</u>.

<u>Ejemplo</u>: $A=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Matrices normales

Sea $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, diremos que es normal si $\overline{A}^T \cdot A = A \cdot \overline{A}^T$.

Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Ejemplos: $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

En resumen con respecto a las familias de matrices cuadradas, definidas en:

Campo real $a_{i,j} \in \mathbf{R}$		**Campo complejo** $a_{i,j} \in \mathbf{C}$		
Simétrica $(A=A^T)$	→	Hermítica $(A=\overline{A}^T)$	↘	
Antisimétrica $(A=-A^T)$	→	Antihermítica $(A=-\overline{A}^T)$	→	Normal $\left(\overline{A}^T \cdot A = A\cdot \overline{A}^T\right)$
Ortogonal $(A^{-1}=A^T)$	→	Unitaria $(A^{-1}=\overline{A}^T)$	↗	

Aplicaciones de la diagonalización de matrices

I) Cálculo de la potencia natural *n*-esima de una matriz.

Sea $A=((a_{i,j}))$ de orden n sobre el cuerpo **K** (**R** ó **C**).
Si A es diagonizable $\rightarrow \exists\, P$ inversible tal que se verifica: $P^{-1}\cdot A\cdot P=D$ (1),

donde D es una matriz diagonal de la forma $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$

de (1)

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$$
$$A^2=P\cdot D\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot P}_{I}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^2\cdot P^{-1}$$
$$A^3=A^2\cdot A=P\cdot D^2\cdot \underbrace{P^{-1}.P}_{I}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^3\cdot P^{-1}$$
$$\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A^k=A^{k-1}\cdot A=P\cdot D^{k-1}\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot P}_{I}\cdot D\cdot P^{-1} = P\cdot D^k\cdot P^{-1}$$

$$A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}=P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

Esta última expresión indica una forma más simple de operar que el cálculo directo de la potenciación de la matriz.

II) Identificación de cónicas y cuádricas

Sea, por ejemplo, la expresión algebraica en $\mathbf{R}^3$ / $2x^2 + xy + 6xz - y^2 - z^2 = 2$

Es posible expresarla en forma matricial $X^T\cdot A\cdot X = k$ de forma que la matriz A sea hermítica:

$$X^T \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 .$$

El hecho de elegir que A sea hermítica (en este caso particular en el campo real, <u>simétrica</u>) se debe a que de esta forma está garantizada su diagonalización y que los autovectores correspondientes son ortogonales.
Se determina la ecuación característica de A, los autovalores y autovectores.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \to \det(A-\lambda I) = 0 \ \to \ (1+\lambda)^2(2-\lambda)+18(1+\lambda)=0$$

$$(1+\lambda)\ (-\lambda^2+\lambda+20)=0 \ \to \ (1+\lambda)\ (\lambda+4)\ (\lambda-5)=0$$

Los resultados obtenidos son:

$$\lambda_1 = -1 \ \to \ \text{autovector } \ \vec{u}_1 = (0,1,-1)$$
$$\lambda_2 = -4 \ \to \ \text{autovector } \ \vec{u}_2 = (-1,1,1)$$
$$\lambda_3 = 5 \ \to \ \text{autovector } \ \vec{u}_3 = (2,1,1)$$

Como $\{\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3\}$ es una base ortogonal, para normalizar se utiliza la norma euclideana.

$$\|\vec{u}_1\|=\sqrt{2} \quad \|\vec{u}_2\|=\sqrt{3} \quad \|\vec{u}_3\|=\sqrt{6}$$

$$\to \{\hat{u}_1;\hat{u}_2;\hat{u}_3\} = \left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\} \to$$

La matriz de pasaje o cambio es $P = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ donde U_k indica un vector columna cuyos elementos son las componentes del versor $\hat{u}_k$ para k=1, 2,3.

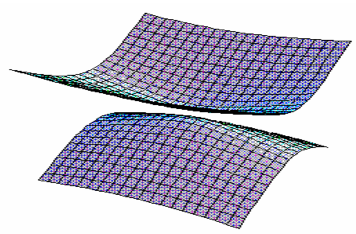
Dado que $P^{-1} = P^T$ por se ortogonal, $D = P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Como $X^T \cdot A \cdot X = 2 \ \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, es decir, $X = P \cdot X'$, verificándose que $X^T = X'^T \cdot P^T$.

Entonces: $\quad X'^T . \underbrace{P^T.A.P}_{D} X' = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad -x'^2 - 4y'^2 + 5z'^2 = 2$.

Esta ecuación corresponde, con respecto a los nuevos ejes definidos por los versores $\vec{u}_1^{\,0}, \vec{u}_2^{\,0}, \vec{u}_3^{\,0}$, a

$$-\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{1/2} + \frac{z'^2}{2/5} = 1 \quad \text{hiperboloide de dos hojas}$$



<u>III) Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden a coeficientes constantes</u>

Sea el sistema $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -3x(t) - 6y(t) - 6z(t) \end{cases}$.

Hallar las funciones derivables $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ que satisfacen todas las ecuaciones diferenciales del sistema, determinando el conjunto solución $(x,y,z)=(x(t),y(t),z(t))$.

Representando el sistema en forma matricial $\boxed{\dot{X} = A \cdot X}$ **(1)**, donde

$$\dot{X}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si A es diagonalizable, entonces existe D (matriz diagonal) tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ siendo P la matriz de transición o de pasaje. Así, se verificará que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Reemplazando esta expresión en **(1)**,

$$\dot{X} = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot X \rightarrow P^{-1} \cdot \dot{X} = D \cdot X \quad \textbf{(2)}$$

Proponemos la sustitución $\dot{Y} = P^{-1} \cdot \dot{X}$ de donde $Y = P^{-1} \cdot X$.
Reemplazamos en **(2)** resultando finalmente que $\boxed{\dot{Y} = D \cdot Y}$ **(3).**

Determinamos la ecuación característica de A, los autovalores y autovectores.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda (\lambda + 3) (\lambda + 2) = 0$$

Los resultados obtenidos son:

$\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow$ autovector $\vec{u}_1 = (0,1,-1)$

$\lambda_2 = -3 \quad \rightarrow$ autovector $\vec{u}_2 = (1,0,-1)$

$\lambda_3 = -2 \quad \rightarrow$ autovector $\vec{u}_3 = (2,-1,0)$

Concluimos que A es diagonalizable.

Utilizamos la expresión **(3)** y encontramos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = -3y_2 \\ \dot{y}_3 = -2y_3 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

Este nuevo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a resolver tiene la ventaja sobre el sistema original que está constituido por ecuaciones desacopladas, es decir que cada una de las nuevas funciones incógnitas se resuelve en forma independiente de las demás.

Empleando algún método adecuado de resolución de ecuaciones diferenciales (por ejemplo, en este caso, variables separables) las soluciones son:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 \\ y_2(t) = C_2 \cdot e^{-3t} \\ y_3(t) = C_3 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

Como $Y = P^{-1} \cdot X \Rightarrow X = P \cdot Y$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \cdot e^{-3t} \\ C_3 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix}$, la solución es

$$\begin{cases} x(t) = C_2 \cdot e^{-3t} + 2C_3 \cdot e^{-2t} \\ y(t) = C_1 - C_3 \cdot e^{-2t} \\ z(t) = -C_1 - C_2 \cdot e^{-3t} \end{cases},$$

en forma equivalente, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Forma de Jordan

Se ha visto que si una matriz cuadrada A tiene n autovectores linealmente independientes, entonces A es diagonalizable; es decir, existe una matriz diagonal semejante a A, donde los elementos de la diagonal principal son los autovalores correspondientes. Sintetizando, si existe una matriz de transición P inversible tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ entonces D es una matriz semejante a A y además es diagonal, entonces A es diagonizable. Pero, no todas las matrices son diagonizables ya que no poseen la cantidad suficiente de autovectores necesarios para construir la matriz P de transición o de pasaje. El problema se presenta cuando las raíces de la ecuación característica (autovalores) son de orden de multiplicidad $m(\lambda) > 1$. En ciertos casos, a pesar de los autovalores múltiples es posible obtener los autovectores necesarios, pero en otros casos no lo es. Cuando la matriz asociada a la transformación en una base no es diagonalizable, entonces se plantea obtener una matriz aproximada J a una diagonal tal que sea igual a $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

El método para ello se conoce como forma de Jordan.

1) En el caso límite de que A tenga n autovectores linealmente independientes, la forma de Jordan coincide con la matriz diagonal $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

2) Cuando esto no ocurre, por cada autovector que se pierde, la matriz de Jordan incorpora un 1 en la diagonal paralela a la principal por encima de ella, mientras que en la diagonal principal aparecen los autovalores de A.

La forma de Jordan es el caso más general y su construcción es axiomática, pero muy inestable, ya que pequeñas variaciones en A, pueden producir que se completen los autovectores y eliminar los elementos incorporados en la diagonal superior a la principal.

Ejemplos

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, analizar la factibilidad de su diagonalización.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\rightarrow \det(A-\lambda I)=\lambda^2(1-\lambda)=0\rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\wedge\lambda_3=1$$

Los autovalores son 0 y 1.

Si $\lambda=0$, el sistema $(A-\lambda I)\cdot X=O$ se convierte en $A\cdot X=O\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow x_3=0, x_1=x_2$.

$$S_{\lambda=0}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/x_3=0\wedge x_1=x_2\}=(x_1,x_1,0)=x_1(1{,}1{,}0),\forall x_1\in \mathbf{R}\ .$$

Adoptamos $\vec{u}_1=(1{,}1{,}0)$ como autovector. Como el orden multiplicidad de la raíz $m(\lambda=0)=2$ se pierde un autovector.

Si $\lambda=1$ es $(A-I)\cdot X=O\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow x_3=0,\ x_2=2x_3=0,\ \forall x_1\in\mathbf{R}$.

$$S_{\lambda=1}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/x_2=x_3=0\}=(x_1,0,0)=x_1(1,0,0),\forall x_1\in\mathbf{R}\,.$$

Adoptamos como autovector $\vec{u}_2=(1,0,0)$. En este caso, por ser raíz simple $m(\lambda=1)=1$, le corresponde un sólo autovector.

La matriz A no es diagonizable porque pierde un autovector para $\lambda=0$. La forma de Jordan correspondiente está constituida por:

para el autovalor $\lambda_3=1$, una submatriz diagonal de 1x1

para los autovalores $\lambda_1=\lambda_2=0$, una submatriz de 2x2 donde se incorpora $a_{2,3}=1$,

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Observación: Si fuera $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0.1 & 0\end{pmatrix}$ los autovalores serían $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.316$ y $\lambda_3=-0.316$ y sería diagonalizable.

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}\rightarrow \det(A-\lambda I)=0\rightarrow(1-\lambda)^3=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

Hay un único autovalor, 1.

Si $\lambda=1$, el sistema $(A-\lambda I)\cdot X=O$ se transforma en $(A-I)\cdot X=O$. La resolución correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow x_3=0\wedge x_2=0,\forall x_1\in\mathbf{R}$$

$$S_{\lambda=1}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/x_2=x_3=0\}=x_1(1,0,0)\ \ \forall x_1\in\mathbf{R}$$

Un sólo autovector se puede extraer $\vec{u}_1=(1,0,0)\rightarrow$ pierde 2 autovectores $\rightarrow$ se incorporan 2 elementos $a_{1,2}=a_{2,3}=1$, siendo la forma de Jordan asociada a A:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Si $A \in \mathbf{R}^{4\times4}$ y los autovalores son $\lambda_1=2 \wedge \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ y suponemos que se pierden dos autovectores, entonces la forma de Jordan será:

$$J = \left(\begin{array}{c:ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Nota:</u> Cada uno de los autovectores forman lo que se llama <u>bloques de Jordan</u> que corresponden a submatrices de $m\times m$, donde m es el orden de multiplicidad del autovalor λ_k, de la forma:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

donde aparecen tantos 1 como autovectores se pierden.

Por ejemplo, si $A \in \mathbf{R}^{5\times5}$, $\lambda_1=\lambda_2=2 \wedge \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=1$ y se pierden 3 autovectores, resulta

$$J = \left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} J_1 & 0 \\ \hdashline 0 & J_2 \end{array}\right)$$

Una de las preguntas que queda pendiente de responder está relacionada con el hecho de que si bien se obtiene como sustituta de la matriz diagonal la forma de Jordan / $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$, ¿cuál será la matriz P inversible que permite el cambio de base? Analicemos el siguiente ejemplo.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde $\det(A-\lambda I) = \lambda\ (\lambda-2)^3 = 0$.

Los autovalores y sus multiplicidades respectivas son: $\lambda_1=0$ con $m(0)=1$ y $\lambda_2=2$ con $m(2)=3$.

Para $\lambda_1=0$, el sistema $(A-\lambda I) \cdot X = O$ se reduce a $A \cdot X = O$. Su resolución:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

corresponde $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = -x_2, \forall x_2 \in \mathbf{R}$, dando

$$S_{\lambda=0} = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = 0 \wedge x_3 = 0 \wedge x_2 = -x_4\} = (0, x_2, 0, -x_2) = x_2(0,1,0,-1), \forall x_2 \in \mathbf{R}$$

Para $\lambda_1=0$ $\rightarrow$ autovector $\vec{u}_1 = (0,1,0,-1)$.

Para $\lambda_2=2$, el sistema a resolver es $(A-2I) \cdot X = O$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&0\\1&1&-1&3&0\\0&1&0&1&0\\1&-1&-1&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&0\\1&1&-1&3&0\\0&1&0&1&0\\0&-2&0&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&0\\1&1&-1&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&0\end{array}\right)$$

Resultando: $-4x_4=0 \rightarrow x_4=0$, $x_2+x_4=0 \rightarrow x_2=0$, $x_1-x_3=0 \rightarrow x_3=x_1\ \forall\ x_1\in\mathbf{R}$.

$S_{\lambda=2} = S_{\lambda=2}\{X=(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_2=x_4=0\wedge x_1=x_3\}=(x_1,0,x_1,0)=x_1(1,0,1,0),\forall x_1\in\mathbf{R}$

Para $\lambda_2=2 \rightarrow$ autovector $\vec{u}_2=(1,0,1,0)$, se pierden dos autovectores.

La forma de Jordan que corresponde a A es

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right).$$

Para obtener la matriz $P\,/\,P^{-1}\cdot A\cdot P=J$ (1), tenemos asociado $\lambda_1=0$ con $\vec{u}_1=(0,1,0,-1)$ y $\lambda_2=2$ con $\vec{u}_2=(1,0,1,0)$.

Tomamos $P=(U_2\,U_3\,U_4\,U_1)$, respetando el orden de Jordan y donde se desconocen $\vec{u}_3$ y $\vec{u}_4$.

De (1) $A\cdot P=P\cdot J$, resultando que:

$$A\cdot P=(AU_2\ AU_3\ AU_4\ AU_1)$$

$$P\cdot J=(U_2\,U_3\,U_4\,U_1)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_2&1&0&0\\0&\lambda_2&1&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&\lambda_1\end{pmatrix}=(\lambda_2U_2\ \ U_2+\lambda_2U_3\ \ U_3+\lambda_2U_4\ \ \lambda_1U_1)$$

$$\begin{cases}AU_2=\lambda_2U_2 & \text{I) }(A-\lambda_2I)U_2=O\\AU_3=U_2+\lambda_2U_3 & \text{II)}(A-\lambda_2I)U_3=U_2\\AU_4=U_3+\lambda_2U_4 & \text{III)}(A-\lambda_2I)U_4=U_3\\AU_1=\lambda_1U_1 & \text{IV)}(A-\lambda_1I)U_1=O\end{cases}$$

De I), $(A-2I)U_2=O$, $\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&0\\1&1&-1&3&0\\0&1&0&1&0\\1&-1&-1&-3&0\end{array}\right)\rightarrow\vec{u}_2=(1,0,1,0)$, como era de esperar.

De II), $(A-2I)U_3=U_2$, la resolución conduce a $\vec{u}_3$, el cual claramente no es un autovector de A.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&1\\1&1&-1&3&0\\0&1&0&1&1\\1&-1&-1&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&1\\1&1&-1&3&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&0&-6&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&1\\1&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&2\end{array}\right)$$

$$-4x_4=2 \rightarrow x_4=-\frac{1}{2};\ x_2+x_4=1 \rightarrow x_2=1-x_4=\frac{3}{2};\ x_1-x_3+2x_4=-1 \rightarrow \forall x_1\in\mathbf{R}.$$

De las infinitas soluciones, $S=\left\{\left(x_1,\frac{3}{2},x_1,-\frac{1}{2}\right),\forall x_1\in R\right\}$, elegimos una de ellas para obtener el vector buscado. Tomamos $x_1=0 \rightarrow \vec{u}_3=\left(0,\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$.

De III) $(A-2I)U_4=U_3 \ \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -1/2 \end{array}\right)$ → la resolución conduce a $\vec{u}_4$. Este vector tampoco es una autovector de A.

De las infinitas soluciones, $S=\left\{\left(x_1,-\frac{1}{2},x_1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \forall x_1 \in \mathbf{R}\right\}$, elegimos una de ellas.

Tomamos $x_1=0 \ \rightarrow \ \vec{u}_4=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

De IV) $A\cdot U_1=O$, obtenemos $\vec{u}_1=(0,1,0,-1)$.

Resulta así, la matriz

$$P=\left(U_2\,U_3\,U_4\,U_1\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio de los vectores columna de P, $R(P)$, tiene como base a $\{\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4,\vec{u}_1\}$, ya que se puede proba probar su independencia lineal. Esta base de vectores, donde a $\vec{u}_3$ y a $\vec{u}_4$ se los asocia con $\lambda_2=2$, se llama <u>base de Jordan</u>.

La solución no es única, y tampoco existe un orden preestablecido para la ubicación de los bloques de Jordan. Así, en este ejemplo, es válido decir que

$$J=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \ \text{y} \ P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

==

El precedente trabajo fue elaborado en Mayo de 1996, con el objetivo de complementar el estudio de la temática correspondiente, por Ing. Enrique Marcaccio con la colaboración de Prof. María T. Arnuzzo y Lic. Julia E. Contin.