## Ejercicio 17

*Aplicación del conceptos desarrollados sobre* ***espacios y subespacios vectoriales****, en particular los de* ***dimensión y ortogonalidad****, al estudio de los* ***cuatro subespacios fundamentales*** *de una* ***matriz real****.*

En una matriz $A \in R^{n\,x\,m}$ es posible identificar cuatro subespacios fundamentales que se definen a partir de sus elementos; ellos son:

- Espacio nulo de $A$: $Nul(A)$
  El ***espacio nulo*** de $\boldsymbol{A}$, está formado por el conjunto de todos los vectores solución de la ecuación matricial: $\boldsymbol{A\,.\,X = O}$. $\left(\boldsymbol{Nul(A) \subset R^m}\right)$
- Espacio de las filas de $A$: $Fil(A)$
  El ***espacio fila*** de $\boldsymbol{A}$, es el espacio generado por los vectores fila de $\boldsymbol{A}$, por lo tanto se obtiene resolviendo el sistema matricial: $\boldsymbol{A^T\,.Y = X}$. $\left(\boldsymbol{Fil(A) \subset R^m}\right)$
- Espacio de las columnas de $A$: $Col(A)$
  El ***espacio columna*** de $\boldsymbol{A}$, es el espacio generado por las columnas de $\boldsymbol{A}$, por lo tanto se obtiene resolviendo el sistema matricial: $\boldsymbol{A\,.\,X = Y}$. $\left(\boldsymbol{Col(A) \subset R^n}\right)$
- Espacio nulo izquierdo de $A$: $NulI(A)$
  El ***espacio nulo izquierda*** de $\boldsymbol{A}$, es el espacio de todos los vectores solución de la ecuación matricial: $\boldsymbol{A^T\,.Y = O}$. $\left(\boldsymbol{NulI(A) \subset R^n}\right)$

**17.1)**

Entre las **dimensiones** de los subespacios fundamentales de una matriz existe una relación importante, que está dada por el siguiente teorema:

a) El espacio de las filas y el espacio de las columnas de una matriz, tienen la misma dimensión.
b) El espacio nulo de una matriz de orden: $n\,x\,m$ , tiene dimensión: $m-r$, siendo $r$ la dimensión del espacio de las filas de dicha matriz.
c) El espacio nulo izquierdo de una matriz de orden $n\,x\,m$, tiene dimensión: $n-r$, siendo $r$ la dimensión del espacio de las filas de dicha matriz.

**17.2)**

Otras características importantes de estos espacios fundamentales, son las condiciones de **ortogonalidad**, que se verifican entre ellos. Las mismas están enunciadas por el siguiente teorema:

a) El espacio nulo de $A \in R^{n\,x\,m}$, es el complemento ortogonal de su espacio fila en: $R^m$.
b) El espacio nulo izquierdo de $A \in R^{n\,x\,m}$, es el complemento ortogonal de su espacio columna de: $R^n$.

**17.1)** Hallar los cuatro espacios fundamentales de la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{pmatrix}$ dando una base para cada uno de ellos y sus respectivas dimensiones.

***<u>Resolución</u>:***

$\boldsymbol{Nul(A)}$: $A.X=O \;\wedge\; A\in R^{4x5} \;\wedge\; X\in R^{5x1} \;\wedge\; S_{Nul(A)}\subset R^{5}$

$$\begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17 & 0\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & 0\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 & 0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17 & 0\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -10 & 16 & 0 & -34 & 0\\ -4 & -8 & 12 & 0 & -28 & 0\end{pmatrix} \underset{F_4-2F_1}{\overset{F_3-2F_1}{\approx}} \begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17 & 0\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -4 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}F_4 \begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17 & 0\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} \approx -\frac{1}{2}F_1 \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x_5} = 0\\ \boldsymbol{x_4} - 5\boldsymbol{x_5} = 0\\ \boldsymbol{x_2} - 2\boldsymbol{x_3} + 3\boldsymbol{x_5} = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x_1} = -\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_5}\\ \boldsymbol{x_4} = 5\boldsymbol{x_5}\\ \boldsymbol{x_2} = 2\boldsymbol{x_3} - 3\boldsymbol{x_5}\end{cases}$$

$S_{Nul(A)} = \left\{(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5)\in R^5 \,/\, (x_1;x_2;x_3;x_4;x_5) = \lambda(-1;2;1;0;0) + \mu(-1;-3;0;5;1) \;\wedge\; \forall\lambda\in R \;\wedge\; \forall\mu\in R\right\}$

$\dim[Nul(A)] = 2$

$Fil(A)$: $A^T.Y = X \;\wedge\; A^T\in R^{5x4} \;\wedge\; Y\in R^{4x1} \;\wedge\; X\in R^{5x1} \;\wedge\; S_{Fil(A)}\subset R^5$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & 1 & \boldsymbol{x_1}\\ -5 & 3 & 11 & 7 & \boldsymbol{x_2}\\ 8 & -5 & -19 & -13 & \boldsymbol{x_3}\\ 0 & 1 & 7 & 5 & \boldsymbol{x_4}\\ -17 & 5 & 1 & -3 & \boldsymbol{x_5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-2 & 0 & -4 & -4 & \boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_4}\\ -5 & 0 & -10 & -8 & \boldsymbol{x_2}-3\boldsymbol{x_4}\\ 8 & 0 & 16 & 12 & \boldsymbol{x_3}+5\boldsymbol{x_4}\\ 0 & 1 & 7 & 5 & \boldsymbol{x_4}\\ -17 & 0 & -34 & -28 & \boldsymbol{x_5}-5\boldsymbol{x_4}\end{pmatrix} \approx$$

$$\approx F_2-3F_1 \begin{pmatrix}-2 & 0 & -4 & -4 & x_1-x_4\\ 1 & 0 & 2 & 4 & -3x_1+x_2\\ 8 & 0 & 16 & 12 & x_3+5x_4\\ 0 & 1 & 7 & 5 & x_4\\ -17 & 0 & -34 & -28 & x_5-5x_4\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & -5\boldsymbol{x_1}+2\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_4}\\ 1 & 0 & 2 & 4 & -3\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}\\ 0 & 0 & 0 & -20 & 24\boldsymbol{x_1}-8\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}+5\boldsymbol{x_4}\\ 0 & 1 & 7 & 5 & \boldsymbol{x_4}\\ 0 & 0 & 0 & 40 & -51\boldsymbol{x_1}+17\boldsymbol{x_2}-5\boldsymbol{x_4}+\boldsymbol{x_5}\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_5-10F_1}{\overset{F_3+5F_1}{\approx}} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & -5x_1+2x_2-x_4\\ 1 & 0 & 2 & 4 & -3x_1+x_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+2x_2+x_3\\ 0 & 1 & 7 & 5 & x_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1-3x_2+5x_4+x_5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x_1+2x_2+x_3 = 0\\ -x_1-3x_2+5x_4+x_5 = 0\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = x_1 - 2x_2 \\ x_5 = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \end{cases}$$

$$S_{Fil(A)} = \left\{ (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5) \in R^5 \;/\; (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5) = \alpha\,(1;0;1;0;1) + \beta\,(0;1;-2;0;3) + \gamma\,(0;0;0;1;-5) \wedge \forall \alpha \in R \wedge \forall \beta \in R \wedge \forall \gamma \in R \right\}$$

$$\dim[Fil(A)] = 3 \quad \wedge \quad \dim[Nul(A)] + \dim[Fil(A)] = 2 + 3 = 5 = \dim\left(R^5\right) = m$$

$$B_{Nul(A)} = \left\{ \overrightarrow{u_1} = (-1;2;1;0;0)\,,\ \overrightarrow{u_2} = (-1;-3;0;5;1) \right\}$$

$$B_{Fil(A)} = \left\{ \overrightarrow{u_3} = (1;0;1;0;1)\,,\ \overrightarrow{u_4} = (0;1;-2;0;3)\,,\ \overrightarrow{u_5} = (0;0;0;1;-5) \right\}$$

*<u>Teoremas</u>:*

17.1) a) $A \in R^{4x5} \wedge \dim[Fil(A)] = 3 = r \wedge \dim[Nul(A)] = 5 - 3 = 2 = m - r$

17.3) a)
$$\begin{array}{lllll} <\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_3}> = 0 & \wedge & <\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_4}> = 0 & \wedge & <\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_5}> = 0 \\ <\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3}> = 0 & \wedge & <\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_4}> = 0 & \wedge & <\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_5}> = 0 \end{array}$$

$Col(A)$:
$$\begin{array}{l} A.X = Y \wedge A \in R^{4x5} \wedge Y \in R^{4x1} \wedge X \in R^{5x1} \wedge S_{Col(A)} \subset R^4 \\ Col(A) = Fil\left(A^T\right) \quad \wedge \quad Col\left(A^T\right) = Fil(A) \end{array}$$

$$\alpha_1 . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_3 . \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -19 \\ -13 \end{pmatrix} + \alpha_4 . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_5 . \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 & y_1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & y_2 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 & y_3 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 & y_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 & y_1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & y_2 \\ -4 & -10 & 16 & 0 & -34 & y_3 - 7y_2 \\ -4 & -8 & 12 & 0 & -28 & y_4 - 5y_2 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 2F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 & y_1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - 7y_2 - 2y_1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 6 & y_4 - 5y_2 - 2y_1 \end{pmatrix} \rightarrow y_3 - 7y_2 - 2y_1 = 0 \quad \wedge \quad \forall y_4 \in R$$

$$y_3 = 2y_1 + 7y_2 \quad \wedge \quad \forall y_4 \in R$$

$$S_{Col(A)} = \left\{ (y_1;y_2;y_3;y_4) \in R^4 \;/\; (y_1;y_2;y_3;y_4) = \alpha.(1;0;2;0) + \beta.(0;1;7;0) + \delta.(0;0;0;1) \wedge \forall \alpha \in R \wedge \forall \beta \in R \wedge \forall \delta \in R \right\}$$

$$B_{Col(A)} = \left\{ \overrightarrow{v_1} = (1;0;2;0)\,,\ \overrightarrow{v_2} = (0;1;7;0),\ \overrightarrow{v_3} = (0;0;0;1) \right\}$$

$$\dim[Col(A)] = 3 < 4 = n$$

$Null(A)$: $A^T.Y=O \quad \wedge \quad A^T \in R^{5x4} \quad \wedge \quad Y\in R^{4x1} \quad \wedge \quad O\in R^{5x1} \quad \wedge \quad Null(A)\subset R^4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 11 & 7 & 0 \\ 8 & -5 & -19 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ -17 & 5 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & -10 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ -17 & 0 & -34 & -28 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 + 4F_1}{\overset{F_3 - 3F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ -17 & 0 & -34 & -28 & 0 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_3 = 0 \rightarrow y_1 = -2y_3 \\ y_2 + 7y_3 = 0 \rightarrow y_2 = -7y_3 \end{cases}$$

$$S_{Null(A)} = \{(y_1;y_2;y_3;y_4)\in R^4 \ / \ (y_1;y_2;y_3;y_4) = \alpha.(-2;-7;1;0) \wedge \forall\alpha\in R\}$$

$B_{Null(A)} = \{\overrightarrow{v_4} = (-2;-7;1;0)\}$ $\qquad \dim[Null(A)] = 1$

*Teoremas:*

17.1) a) $\dim[Fil(A)] = 3 = \dim[Col(A)]$

c) $\dim[Null(A)] = 1 = 4 - 3 = \dim(R^4) - \dim[Fil(A)] = n - r$

17.3) b) $<\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_4}> = 0 \quad \wedge \quad <\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_4}> = 0 \quad \wedge \quad <\overrightarrow{v_3};\overrightarrow{v_4}> = 0$

**17.2)** Hallar los espacios fundamentales y verificar lo señalado por el teorema anterior (recordar el resumen del inicio 17.1) para la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. ¿Qué interpretación geométrica se puede hacer de los resultados obtenidos?

***Resolución:***

$Nul(B)$: $\boldsymbol{B.X=O} \quad \wedge \quad \boldsymbol{B\in R^{2x3}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X\in R^{3x1}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{S_{Nul(B)}\subset R^3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 0 \rightarrow \boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$$

$$S_{Nul(B)} = \{(x;y;z)\in R^3 \ / \ (x;y;z) = \alpha.(-2;1;0) + \beta.(-3;0;1) \wedge \forall\alpha\in R \wedge \forall\beta\in R\}$$

$\dim[Nul(B)] = 2$

$B_{Nul(B)} = \{\overrightarrow{u_1} = (-2;1;0), \overrightarrow{u_2} = (-3;0;1)\}$

***Interpretación geométrica de $Nul(B)$***: plano "$\pi$" que pasa por el origen de coordenadas.

$\boldsymbol{Fil(B)}$: $\boldsymbol{B^T.Y = X} \quad \wedge \quad \boldsymbol{B^T\in R^{3x2}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{Y\in R^{2x1}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X\in R^{3x1}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{S_{Fil(B)}\subset R^3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 3 & 3 & x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1 \\ x_3 - 3x_1 = 0 \rightarrow x_3 = 3x_1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_{Fil(B)} = \{(x_1;x_2;x_3) \in \boldsymbol{R}^3 / (x_1;x_2;x_3) = \alpha(1;2;3) \wedge \forall \alpha \in \boldsymbol{R}\}$

$B_{Fil(B)} = \{\overrightarrow{u_3} = (1;2;3)\}$

$\dim[Fil(B)] = 1 \quad \wedge \quad \dim[Nul(B)] + \dim[Fil(B)] = 2+1 = 3 = \dim(R^3) = m$

***Interpretación geométrica de*** $Fil(B)$: recta "$r$" que pasa por el origen de coordenadas, $r \subset R^3$ y es perpendicular (ortogonal) al plano "$\pi$".

*<u>Teoremas</u>:*

17.1) a) $B \in R^{2x3} \wedge \dim[Fil(B)] = 1 = r \wedge \dim[Nul(\mathrm{B})] = 3-1 = 2 = m-r$

17.3) a) $<\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_3}> = 0 \qquad \wedge \qquad <\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3}> = 0$

$$Col(B): \begin{array}{l} B\,.X = Y \;\wedge\; B \in R^{2x3} \;\wedge\; Y \in R^{2x1} \;\wedge\; X \in R^{3x1} \;\wedge\; \boldsymbol{S}_{Col(B)} \subset R^2 \\ Col(B) = Fil(B^T) \quad \wedge \quad Col(B^T) = Fil(B) \end{array}$$

$$\alpha_1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 . \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & y_1 \\ 1 & 2 & 3 & y_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; y_2 - y_1 = 0 \;\rightarrow\; y_2 = y_1$$

$\boldsymbol{S}_{Col(B)} = \{(y_1;y_2) \in R^2 / (y_1;y_2) = \lambda.(1;1) \wedge \forall \lambda \in R\}$

$B_{Col(B)} = \{\overrightarrow{v_1} = (1;1)\}$

$\dim[Col(B)] = 1 < 2 = n$

***Interpretación geométrica de*** $Col(B)$: recta "$s$", $s \subset R^2$ y que pasa por el origen de coordenadas.

$NulI(B)$: $\quad B^T .Y = O \quad \wedge \quad B^T \in R^{3x2} \quad \wedge \quad Y \in R^{2x1} \quad \wedge \quad O \in R^{3x1} \quad \wedge \quad NulI(B) \subset R^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; x + y = 0 \;\rightarrow\; x = -y$$

$\boldsymbol{S}_{NulIB} = \{(y_1;y_2) \in R^2 / (y_1;y_2) = \lambda.(1;-1) \wedge \forall \lambda \in R\}$

$B_{NulI(B)} = \{\overrightarrow{v_2} = (1;-1)\} \qquad \dim[NulI\,(B)] = 1$

***Interpretación geométrica de*** $NulI(B)$: recta "$t$", $t \subset R^2$, que pasa por el origen de coordenadas y "$t$" perpendicular (ortogonal) a la recta "$s$".

*Teoremas:*

17.1) a) $\mathbf{dim}\,[\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{B})] = 1 = \mathbf{dim}[\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{B})]$

c) $\mathbf{dim}[\boldsymbol{NulI}(\boldsymbol{B})] = 1 = 2 - 1 = \mathbf{dim}(\boldsymbol{R}^2) - \mathbf{dim}[\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{B})] = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$

17.3) b) $<\overrightarrow{v_1}\,;\overrightarrow{v_2}> = 0$

**17.3)** Hacer lo mismo para las matrices $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

***<u>Resolución:</u>***

Para $\boldsymbol{C}$:

$\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})$: $\boldsymbol{C}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \quad \wedge \quad \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{3x4} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^{4x1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})} \subset \boldsymbol{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \boldsymbol{x}_3 = 0 \\ \boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_4 \end{cases} \wedge \quad \forall\, \boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})} = \{(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \;/\; (x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4) = \alpha.(1;0;0;0) + \beta.(0;-1;0;0) \;\wedge\; \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \;\wedge\; \forall \beta \in \boldsymbol{R}\}$

$\mathbf{dim}\,[\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})] = 2$

$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1} = (1;0;0;0)\,,\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2} = (0;-1;1;0)\}$

$\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})$: $\boldsymbol{C}^T.\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \quad \wedge \quad \boldsymbol{C}^T \in \boldsymbol{R}^{4x3} \quad \wedge \quad \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^{3x1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^{4x1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})} \subset \boldsymbol{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_1 \\ 3 & 0 & 1 & \boldsymbol{x}_2 \\ 3 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_3 \\ 3 & 0 & 1 & \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_1 \\ 3 & 0 & 1 & \boldsymbol{x}_2 \\ 3 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_1 \\ 3 & 0 & 1 & \boldsymbol{x}_2 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_1 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 0 \\ \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 0 \\ \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})} = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \boldsymbol{R}^4 / (x_1;x_2;x_3;x_4) = \alpha(0;1;0;1) + \beta.(0;0;1;0) \wedge \forall \alpha \in \boldsymbol{R} \wedge \forall \beta \in \boldsymbol{R}\}$

$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})} = \{\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3} = (0;1;0;1), \overrightarrow{\boldsymbol{u}_4} = (0;0;1;0)\}$

$\mathbf{dim}[\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})] = 2 \quad \wedge \quad \mathbf{dim}[\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})] + \mathbf{dim}[\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})] = 2 + 2 = 4 = \mathbf{dim}(\boldsymbol{R}^4) = \boldsymbol{m}$

*Teoremas:*

17.1) a) $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{3x4} \;\wedge\; \mathbf{dim}[\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})] = 2 = \boldsymbol{r} \;\wedge\; \mathbf{dim}[\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{C})] = 4 - 2 = 2 = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{r}$

17.3) a) $<\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}> = 0 \quad \wedge \quad <\overrightarrow{\boldsymbol{u}_1}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4}> = 0 \quad \wedge \quad <\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{u}_3}> = 0 \quad \wedge \quad <\overrightarrow{\boldsymbol{u}_2}\,;\overrightarrow{\boldsymbol{u}_4}> = 0$

$\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{C})$: $\boldsymbol{C}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} \quad \wedge \quad \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{3x4} \quad \wedge \quad \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^{3x1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^{4x1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{C})} \subset \boldsymbol{R}^3$

$\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C}^T) \quad \wedge \quad \boldsymbol{Col}(\boldsymbol{C}^T) = \boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{C})$

$$\alpha_1 .\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 .\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 .\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_4 .\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&3&3&3&y_1\\0&0&0&0&y_2\\0&1&0&1&y_3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0&0&3&0&y_1-3y_3\\0&0&0&0&y_2\\0&1&0&1&y_3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0&0&1&0&\frac{1}{2}y_1-y_3\\0&0&0&0&y_2\\0&1&0&1&y_3\end{pmatrix} \rightarrow y_2 = 0$$

$$\boldsymbol{S}_{Col(C)} = \{(y_1;y_2;y_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,/\, (y_1;y_2;y_3) = \alpha.(1;o;o) + \beta.(0;0;1) \wedge \forall\alpha \in \boldsymbol{R} \;\forall\beta \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\boldsymbol{B}_{Col(C)} = \{\overrightarrow{v_1} = (1;0;0)\,,\, \overrightarrow{v_2} = (0;0;1)\}$$

$\mathbf{dim}[Col(C)] = 2$

$$\boldsymbol{NulI(C)}:\quad C^T .Y = O \quad\wedge\quad C^T \in \boldsymbol{R}^{4x3} \quad\wedge\quad Y \in \boldsymbol{R}^{3x1} \quad\wedge\quad O \in \boldsymbol{R}^{4x1} \quad\wedge\quad NulI(B) \subset \boldsymbol{R}^3$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&1&0\\3&0&0&0\\3&0&1&0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&1&0\\3&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}y_3 = 0\\y_1 = 0\end{cases} \wedge \;\forall\, y_2 \in \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{S}_{NulIC} = \{(y_1;y_2;y_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,/\, (y_1;y_2;y_3) = \lambda.(0;1;0) \wedge \forall\lambda \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\boldsymbol{B}_{Nul(C)} = \{\overrightarrow{v_3} = (0;1;0)\}$$ $\mathbf{dim}[NulI\,(C)] = 1$

<u>*Teoremas*</u>:

17.1) a) $\mathbf{dim}\,[Fil(C)] = 2 = \mathbf{dim}[Col(C)]$

c) $\mathbf{dim}[NulI(C)] = 1 = 3 - 2 = \mathbf{dim}(\boldsymbol{R}^3) - \mathbf{dim}[Fil(C)] = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$

17.3) b) $< \overrightarrow{v_1} ; \overrightarrow{v_3} > = 0 \quad\wedge\quad < \overrightarrow{v_2} : \overrightarrow{v_3} > = 0$

Para $\boldsymbol{D}$ :

$$\boldsymbol{Nul(D)}:\quad D.X = O \quad\wedge\quad D \in \boldsymbol{R}^{3x1} \quad\wedge\quad X \in \boldsymbol{R}^{1x1} \quad\wedge\quad \boldsymbol{S}_{Nul(D)} \subset \boldsymbol{R}^1$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\4&0\\5&0\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix} \rightarrow \{x = 0$$

$$\boldsymbol{S}_{Nul(D)} = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, x = 0\}$$

$\mathbf{dim}\,[Nul(D)] = 0$

$$\boldsymbol{Fil(D)}:\quad D^T .Y = X \quad\wedge\quad D^T \in \boldsymbol{R}^{1x3} \quad\wedge\quad Y \in \boldsymbol{R}^{3x1} \quad\wedge\quad X \in \boldsymbol{R} \quad\wedge\quad \boldsymbol{S}_{Fil(D)} \subset \boldsymbol{R}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&5&x\end{pmatrix} \rightarrow \quad Fil(D) \equiv \boldsymbol{R}$$

$\mathbf{dim}[Fil(D)] = 1 \quad\wedge\quad \mathbf{dim}[Nul(D)] + \mathbf{dim}[Fil(D)] = 0 + 1 = 1 = \mathbf{dim}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{m}$

*Teoremas:*

17.1) a) $D \in R^{3x1} \wedge \dim[Fil(D)] = 1 = r \wedge \dim[Nul(D)] = 1-1 = 0 = m-r$

17.3) a) $<0;1> = 0$

$$Col(D): \begin{array}{l} D.X = Y \wedge D \in R^{3x1} \wedge Y \in R^{3x1} \wedge X \in R^{1x1} \wedge S_{Col(CD)} \subset R^3 \\ Col(D) = Fil(D^T) \wedge Col(D^T) = Fil(D) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 4 & y_2 \\ 5 & y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = 4\alpha \\ y_3 = 5\alpha \end{cases}$$

$$S_{Col(D)} = \{(y_1;y_2;y_3) \in R^3 \,/\, (y_1;y_2;y_3) = \alpha.(1;4;5)\ \forall \alpha \in R\}$$

$$B_{Col(D)} = \{\overrightarrow{v_1} = (1;4;5)\}$$

$\dim[Col(D)] = 1$

$$Null(D): \quad D^T.Y = O \wedge D^T \in R^{1x3} \wedge Y \in R^{3x1} \wedge O \in R^{1x1} \wedge Null(D) \subset R^3$$

$$(1\ \ 4\ \ 5\ \ 0) \rightarrow y_1 + 4y_2 + 5y_3 = 0 \rightarrow y_1 = -4y_2 - 5y_3$$

$$S_{NullD} = \{(y_1;y_2;y_3) \in R^3 \,/\, (y_1;y_2;y_3) = \alpha.(-4;1;0) + \beta.(-5;0;1) \wedge \forall \alpha \in R \wedge \forall \beta \in R\}$$

$$B_{Null(D)} = \{\overrightarrow{v_2} = (-4;1;0), \overrightarrow{v_3} = (-5;0;1)\} \qquad \dim[Null(D)] = 2$$

*Teoremas:*

17.1) a) $\dim[Fil(D)] = 1 = \dim[Col(D)]$

c) $\dim[Null(D)] = 2 = 3 - 1 = \dim(R^3) - \dim[Fil(D)] = n - r$

17.3) b) $<\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2}> = 0 \wedge <\overrightarrow{v_1}:\overrightarrow{v_3}> = 0$

**17.4)** Demostrar que cada vector en el espacio de las columnas de $A$ proviene de uno y sólo un vector $x_i$ en el espacio de las filas de $A$. (Sugerencia: plantear la existencia de dos vectores en el espacio fila que tienen la misma imagen en el espacio de las columnas y luego multiplicar la matriz $A$ por la diferencia entre dichos vectores del espacio fila).

***Demostración:***

Suponemos que: $X_1 \neq X_2$

$$\begin{array}{l} A^T.Y = X_1 \\ A^T.Y = X_2 \end{array} \rightarrow A^T.(Y - Y) = X_1 - X_2 \rightarrow A^T.O = X_1 - X_2 \rightarrow O = X_1 - X_2$$

$$\rightarrow A.O = A.(X_1 - X_2) \rightarrow O = A.X_1 - A.X_2 \rightarrow A.X_1 = A.X_2$$

**17.5)** Verificar la relación de ortogonalidad entre los espacios fundamentales para las matrices de los ejercicios **17.1)** y **17.2)**.

***Nota:*** Las verificaciones ya se efectuaron paso a paso en el desarrollo de los ejercicios.

**17.6)** En el ejercicio **17.1)** descomponer el vector: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en una componente sobre el espacio nulo de $\boldsymbol{A}$ y otra sobre el espacio $\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{A})$. ¿En cuál vector de $\boldsymbol{R}^4$ se transforma? Identificar lo que se realizó en el esquema gráfico anterior de los subespacios.

***Resolución:***

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{x_n}$ , donde $\boldsymbol{x_i}$ es la componente en el espacio fila y $\boldsymbol{x_n}$ es la componente en el espacio nulo de $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{x_n} = \left[ \beta_1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta_3 . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right] + \left[ \alpha_1 . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 26 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 27 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 36 & 2 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 36 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -65 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 191 & 22 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{191}\boldsymbol{F}_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -65 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{22}{191} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{245}{191} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{93}{191} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{82}{191} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{81}{191} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{22}{191} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dfrac{295}{191} \\ \beta_2 = \dfrac{93}{191} \\ \alpha_1 = \dfrac{82}{191} \\ \beta_3 = \dfrac{81}{191} \\ \alpha_2 = \dfrac{22}{191} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{295}{191}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{93}{191}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{81}{191}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{295}{191}\\ \frac{93}{191}\\ \frac{109}{191}\\ \frac{81}{191}\\ \frac{169}{191}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_n} = \frac{82}{191}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{22}{191}\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{104}{191}\\ \frac{98}{191}\\ \frac{82}{191}\\ \frac{110}{191}\\ \frac{22}{191}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{x_n} = \begin{pmatrix}\frac{295}{191}\\ \frac{93}{191}\\ \frac{109}{191}\\ \frac{81}{191}\\ \frac{169}{191}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{104}{191}\\ \frac{98}{191}\\ \frac{82}{191}\\ \frac{110}{191}\\ \frac{22}{191}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x_i} = \begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{295}{191}\\ \frac{93}{191}\\ \frac{109}{191}\\ \frac{81}{191}\\ \frac{169}{191}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\5\\3\\-3\end{pmatrix} \quad \wedge \quad \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x_n} = \begin{pmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\frac{104}{191}\\ \frac{98}{191}\\ \frac{82}{191}\\ \frac{110}{191}\\ \frac{22}{191}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

El vector "$\boldsymbol{x}$", se transforma en el vector: $\begin{pmatrix}-16\\5\\3\\-3\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$.

Los subespacios $\boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{A})$ son ortogonales entre sí. Al vector "$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5$", lo escribimos como suma de dos vectores: $\boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{Fil}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{A})$. Los subespacios: $\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{NulI}(\boldsymbol{A})$, también son ortogonales entre sí. El transformado de $\boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{Col}(\boldsymbol{A})$ y el transformado de $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{NulI}(\boldsymbol{A})$, es decir que el transformado de $\boldsymbol{x_n}$ es el vector nulo de $\boldsymbol{R}^4$.