TEORIA DE JUEGOS

INVESTIGACIÓN OPERATIVA

- Taha, H. Investigación de Operaciones. Séptima Edición. Alfaomega Grupo Editor – 2009.
- Anderson Seeney . Métodos Cuantitativos para los Negocios. Séptima Edición. Thomson Editores - 2003

TEORÍA DE JUEGOS

- JUEGOS CON INCETIDUMBRE
- DOS O MAS OPONENTES *INTELIGENTES* DONDE CADA OPONENTE ASPIRA A OPTIMIZAR SU PROPIA DECISIÓN PERO A *COSTA DE LOS OTROS*

EJEMPLO TÍPICO: DESARROLLAR CAMPAÑAS PUBLICITARIAS PARA PRODUCTOS COMPETITIVOS Y DESTINAR TÁCTICAS PARA CADA PRODUCTO.

CONCEPTOS:

- CADA JUGADOR SE DESIGNA COMO OPONENTE.
- CADA JUGADOR TIENE UN NUMERO FINITO O INFINITO DE ELECCIONES LLAMADAS ESTRATEGIAS
- LOS RESULTADOS O PAGOS DE UN JUEGO SE RESUMEN COMO FUNCIONES DE LAS DIFERENTES ESTRATEGIAS PARA CADA JUGADOR.
- UN JUEGO CON DOS JUGADORES, DONDE LA GANACIA DE UN JUGADOR ES IGUAL A LA PERDIDA DEL OTRO, SE CONOCE COMU UN JUEGO DE **DOS PERSONAS Y SUMA CERO**.

CARACTERISTICAS

AMBOS JUGADORES SON RACIONALES

AMBOS JUGADORES ELIGEN SUS ESTRATEGIAS SOLO PARA PROMOVER SU PROPIO BIENESTAR (SIN COMPASIÓN POR EL OPONENTE)

MATRIZ DE PAGO

SUMA CERO

En suma cero es suficiente expresar los resultados en términos del pago a un jugador. EN GENERAL SE EMPLEA UNA MATRIZ PARA RESUMIR LOS PAGOS DE UN JUGADOR CUYAS ESTRATEGIAS ESTAN DADAS POR LOS RENGLONES.

La matriz de pago puede tener cualquier tipo de unidades.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_m & a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

La representación indica que si A utiliza la estrategia i y B utiliza la estrategia j, la retribución para A es a_{ij}, y la retribución para B es $-a_{ij}$.

SOLUCIÓN ÓPTIMA DE JUEGOS DE SUMA CERO ENTRE DOS PERSONAS

- DEBIDO A QUE LOS JUEGOS DE SUMA CERO O CONSTANTE IMPLICAN UN CONFLICTO DE INTERESES, LA BASE PARA LA SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS ÓPTIMAS GARANTIZA QUE NINGUNO DE LOS JUGADORES INTENTA BUSCAR UNA ESTRATEGIA DIFERENTE PORQUE EL RESULTADO SERÁ UNA RETRIBUCIÓN PEOR. ESTAS SOLUCIONES PUEDEN SER EN LA FORMA DE UNA SOLA ESTRATEGIA O VARIAS ESTRATEGIAS COMBINADAS AL AZAR.

Criterio Minimax

- El producto final de esta línea de razonamiento es que cada jugador debe jugar de tal manera que minimice su pérdida máxima, siempre que el resultado de su elección no pueda ser aprovechado por su oponente para mejorar su posición. Esto se conoce como criterio minimax, criterio estándar que propone la teoría de juegos para elegir una estrategia. En realidad, este criterio sostiene que se debe seleccionar la mejor estrategia, aun cuando la elección fuera anunciada al oponente antes de que éste eligiera su estrategia. En términos de la matriz de pagos, implica que el jugador 1 debe elegir aquella estrategia cuyo pago mínimo sea el mayor, mientras que el jugador 2 debe elegir aquella cuyo pago máximo al jugador 1 sea el menor.

Observe que en esta matriz de pagos el mismo elemento proporciona tanto el valor mínimo como el máximo. Este interesante hecho se debe a que tal elemento, por un lado, es el mínimo del renglón y, por el otro, el máximo de la columna. Esta posición de un elemento se llama punto silla.

El hecho de que un juego posea un punto silla es en realidad esencial para determinar cómo debe jugarse. A causa de este punto silla, ningún jugador puede aprovechar la estrategia de su oponente para mejorar su propia posición. En particular, si el jugador 2 predice o sabe que el jugador 1 empleará la estrategia 2, y cambia su plan original de usar la estrategia 2 sólo aumentará sus pérdidas. De igual manera, el jugador 1 sólo empeoraría su posición si cambiara su plan. Así, ningún jugador tiene motivos para considerar un cambio de estrategias, para quedar con ventaja respecto de su oponente, o para evitar que su oponente tenga ventaja. Entonces, ésta es una solución estable (llamada también solución de equilibrio), y cada jugador debe, exclusivamente, emplear sus respectivas estrategias maximin y minimax.

- DOS COMPAÑÍAS, A Y B, VENDEN DOS MARCAS DE UN MEDICAMENTO PARA LA GRIPE. LA COMPAÑÍA A SE ANUNCIA EN RADIO (A1), TELEVISIÓN (A2) Y PERIÓDICOS (A3). LA COMPAÑÍA B, ADEMÁS DE UTILIZAR LA RADIO (B1), LA TELEVISIÓN (B2) Y LOS PERIÓDICOS (B3), TAMBIÉN ENVÍA FOLLETOS POR CORREO (B4). DEPENDIENDO DE LA EFECTIVIDAD DE CADA CAMPAÑA PUBLICITARIA, UNA COMPAÑÍA PUEDE CAPTURAR UNA PARTE DEL MERCADO DE LA OTRA. LA SIGUIENTE MATRIZ RESUME EL PORCENTAJE DEL MERCADO CAPTURADO O PERDIDO POR LA COMPAÑÍA A.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	−2	9	−3
A_2	6	5	6	8
A_3	−2	4	−9	5

RESOLUCIÓN

- **ESTRATEGIAS PURAS** : PUNTO DE ENSILLADURA

SIEMPRE QUE EL MÁXIMO DE LOS MÍNIMOS DE FILA SEA *IGUAL QUE* EL MÍNIMO DE LOS MÁXIMOS DE COLUMNA, LOS JUGADORES NO PUEDEN MEJORAR SUS RESULTADOS AL CAMBIAR LAS ESTRATEGIAS. SE DICE QUE EL JUEGO ESTÁ EN UN **PUNTO DE EQUILIBRIO**. EN EL PUNTO DE EQUILIBRIO, LAS ESTRATEGIAS ÓPTIMAS Y EL VALOR DEL JUEGO NO PUEDEN MEJORARSE CUANDO CAMBIAN LAS ESTRATEGIAS DE CUALQUIER JUGADOR. POR TANTO, UNA **ESTRATEGIA PURA** SE DEFINE COMO LA ESTRATEGIA ÓPTIMA PARA AMBOS JUGADORES. EL REQUISITO PARA UNA ESTRATEGIA PURA ES EL SIGUIENTE:

MÁXIMO(MÍNIMOS DE FILA) MÍNIMO(MÁXIMOS DE COLUMNA)

CUANDO UNA ESTRATEGIA PURA ES ÓPTIMA PARA UN JUEGO DE DOS PERSONAS CON SUMA CERO, SE REALIZAN LOS PASOS SIGUIENTES PARA ENCONTRAR LA ESTRATEGIA ÓPTIMA PARA CADA JUGADOR:

PASO 1. CALCULAR EL RESULTADO MÍNIMO PARA CADA FILA (JUGADOR A).

PASO 2. PARA EL JUGADOR A, SELECCIONAR LA ESTRATEGIA QUE PROPORCIONA EL *MÁXIMO* DE LOS MÍNIMOS DE FILA.

PASO 3. CALCULAR EL RESULTADO MÁXIMO PARA CADA COLUMNA (JUGADOR B).

PASO 4. PARA EL JUGADOR B, SELECCIONAR LA ESTRATEGIA QUE PROPORCIONA EL *MÍNIMO* DE LOS MÁXIMOS DE COLUMNA.

PASO 5. SI EL VALOR MAXIMIN (PASO 2) ES IGUAL AL VALOR MINIMAX (PASO 4), EXISTE UNA

ESTRATEGIA PURA ÓPTIMA PARA AMBOS JUGADORES. LA ESTRATEGIA ÓPTIMA PARA EL JUGADOR A SE IDENTIFICA EN EL PASO 2 Y LA ESTRATEGIA ÓPTIMA PARA EL JUGADOR B

SE IDENTIFICA EN EL PASO 4. EL VALOR DEL JUEGO ESTÁ DADO POR EL VALOR DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN EL QUE LAS ESTRATEGIAS ÓPTIMAS PARA AMBOS JUGADORES SE INTERCEPTAN.

SI EN EL PASO 5 EL VALOR MAXIMIN PARA EL JUGADOR A NO ES IGUAL AL VALOR MINIMAX PARA EL JUGADOR B, UNA ESTRATEGIA PURA NO ES ÓPTIMA PARA EL JUEGO DE DOS PERSONAS CON SUMA CERO.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA UNA *ESTRATEGIA MIXTA*. EN LA SIGUIENTE SECCIÓN MOSTRAMOS CUÁNDO

ES NECESARIO EMPLEAR UNA ESTRATEGIA MIXTA.

MINIMAX

Estrategia		Jugador 2: 1	2	3	Mínimo
	1	−3	−2	6	−3
Jugador 1	2	2	0	2	0 ← Valor maximin
	3	5	−2	−4	−4
	Máximo:	5	0 ↑ Valor minimax	6	

Considere al jugador 1. Si elige la estrategia 1 puede ganar 6 o perder 3. Como el jugador 2 es racional y tratará de aplicar una estrategia que lo proteja de pagos grandes al jugador 1, parece probable que si juega la estrategia 1, el jugador 1 perderá. De manera similar, si selecciona la estrategia 3 el jugador 1 puede ganar 5, pero quizá sea más probable que su oponente racional evite esta pérdida y en su lugar logre que él pierda, lo que puede ascender a 4. Por otro lado, si el jugador 1 elige la estrategia 2, tiene garantizado que no perderá y quizá gane algo. Entonces, por proporcionar la mejor garantía (un pago de 0), la estrategia 2 parece ser la elección "racional" del jugador 1 contra su oponente racional. (Esta línea de razonamiento supone que ambos jugadores tienen aversión a arriesgar pérdidas más grandes que las necesarias, al contrario de quienes disfrutan la apuesta por un gran pago con pocas posibilidades.)

Ahora considere al jugador 2. Puede perder tanto como 5 o 6 si sigue las estrategias 1 o 3, pero está garantizado que al menos empata con la estrategia 2. Entonces, si usa el mismo razona-miento para buscar su mejor garantía contra su oponente racional, parece que la mejor elección es la estrategia 2.

Si los dos jugadores eligen la estrategia 2, el resultado es que empatan. Así, en este caso, ningún jugador mejora con su mejor garantía, pero ambos fuerzan al oponente hacia la misma posición. Aunque cada jugador deduzca la estrategia del otro, no puede explotar esta información para mejorar su posición. Se trata de un empate.

Dominio:

- Dominio: Una estrategia es dominada por una segunda estrategia si esta última es siempre al menos tan buena (y algunas veces mejor) como la primera, sin que importe lo que haga el oponente. Una estrategia dominada se puede eliminar de inmediato para consideraciones posteriores.

	Estrategia	Jugador 2: 1	2	3
Jugador 1	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	−1

Para el jugador 1, la estrategia 3 está dominada por la estrategia 1, ya que tiene pagos más altos (1 . 0, 2 . 1, 4 . –1), independientemente de lo que haga el jugador 2. Al eliminar la estrategia 3 se obtiene la siguiente matriz de pagos reducida:

	1	2	3
1	1	2	4
2	1	0	5

Dominio:

Como se supone que ambos jugadores son racionales, también el jugador 2 puede deducir que el jugador 1 sólo dispone de estas dos estrategias. Entonces, ahora el jugador 2 tiene una estrategia dominada: la estrategia 3, que está dominada tanto por la estrategia 1 como por la 2 puesto que siempre tienen menores pérdidas (pagos al jugador 1) en esta matriz de pagos reducida (para la estrategia 1: 1 , 4, 1 , 5; para la estrategia 2: 2 , 4, 0 , 5). Cuando se elimina esta estrategia se obtiene:

	1	2
1	1	2
2	1	0

En este punto, la estrategia 2 del jugador 1 se convierte en dominada por la estrategia 1, puesto que esta última es mejor en la columna 2 (2 . 0) y es igual en la columna 1 (1 5 1). Si se elimina esta estrategia dominada se llega a

	1	2
1	1	2

Ahora la estrategia 2 del jugador 2 está dominada por la estrategia 1 (1 , 2), por lo que debe eliminarse la estrategia 2.

En consecuencia, ambos jugadores deberán elegir su estrategia 1. Con esta solución, el jugador 1 recibirá un pago de 1 por parte del jugador 2

Conceptos:

- En general, el pago para el jugador 1 cuando ambos jugadores operan de manera óptima recibe el nombre de valor del juego. Se dice que se trata de un juego justo cuando el juego tiene valor 0.
- El concepto de estrategia dominada es muy útil para reducir el tamaño de la matriz de pagos en cuestión y en algunos casos raros como éste puede, de hecho, identificar la solución óptima del juego. Sin embargo, casi todos los juegos requieren otro enfoque para terminar de resolverlos

Resumen de los pasos para resolver los juegos de suma cero para dos personas

El resumen siguiente lista los pasos empleados para resolver los juegos de suma cero para dos personas:

1. Utilice el procedimiento maximin para el jugador A y el procedimiento minimax para el jugador B con el fi n de determinar si existe una solución de estrategia pura. (Consulte los pasos previos para identificar una estrategia pura.) Si existe una estrategia pura, es la solución óptima.

2. Si no existe una estrategia pura y el juego es mayor que 2 2, identifique una estrategia dominada para eliminar una fila o columna. Elabore la tabla de resultados reducida y continúe con la dominancia para eliminar el mayor número de filas y columnas posible.

3. Si el juego reducido es 2 2, calcule las probabilidades de una estrategia mixta óptima posible. Si el juego no se puede reducir a uno de 2 2, utilice un modelo de programación lineal para calcular las probabilidades de estrategia mixta óptima.

Estrategias mixtas

- Cuando un juego no tiene punto silla, la teoría de juegos aconseja a cada jugador asignar una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias. Para expresar este consejo de manera matemática, sea

P_i= probabilidad de que el jugador 1 use la estrategia i ($i = 1, 2, . . ., m$),
Q_i= probabilidad de que el jugador 2 use la estrategia j ($j = 1, 2, . . ., n$)

Con esta medida, la teoría de juegos puede extender el concepto del criterio minimax a juegos que no tienen punto silla y que, por tanto, necesitan estrategias mixtas. En este contexto, el criterio minimax sostiene que un jugador debe elegir la estrategia mixta que minimice la máxima pérdida que espera para sí mismo. De manera equivalente, si se analizan los pagos (jugador 1) en lugar de las pérdidas (jugador 2), este criterio es maximin, es decir, maximizar el pago esperado mínimo para el jugador. Por pago esperado mínimo se entiende el pago esperado más pequeño posible que puede resultar de cualquier estrategia mixta con la que el oponente puede contar. De esta forma, la estrategia mixta del jugador 1 que es óptima, según este criterio, es la que proporciona la garantía (el mínimo pago esperado) de que es la mejor (máxima). (El valor de esta mejor garantía es el valor maximin y se denota por v.) De manera similar, la estrategia óptima del jugador 2 es la que proporciona la mejor garantía, donde mejor significa mínima y garantía se refiere a la máxima pérdida que espera poder lograr con cualquiera de las estrategias mixtas del oponente. (La mejor garantía es el valor minimax que se denota por v.)

Ejemplo: estrategias mixtas

Jugador 1	Jugador 2		
	3	6	1
	5	2	3
	4	2	-3

Aplicando dominio: E1 domina a E3 del jugador 1, eliminado esto, E3 domina E1 en Jugador 2.
Buscando las probabilidades:

Jugador 1	Jugador 2		
	6	1	Q
	2	3	1- Q
	P	1- P	

Armando un sistema de ecuaciones:

$6P + 1(1-P) = 2P + 3\ (1-P)$ despejando $P= 2/6$

$6Q + 2(1-Q)= 1Q + 3(1-Q)$ despejando $Q= 1/6$

P= 2/6 Representa el % del tiempo que el jugador 2 va a jugar la E2 y 1-P es el % del tiempo que va a jugar la E3.

Q= 1/6 Representa el % del tiempo que el jugador 1 va a jugar la E1 y 1-P es el % del tiempo que va a jugar la E3

Ejemplo: estrategias mixtas

Jugador 1	Jugador 2	
	6	1
	2	3

Q = 1/6

1- Q = 5/6

P = 2/6   1- P= 4/6

Valor del Pago = 1/6 [6 * 2/6 + 1* 4/6] + 5/6 [2 * 2/6 + 3* 4/6] = 2,66

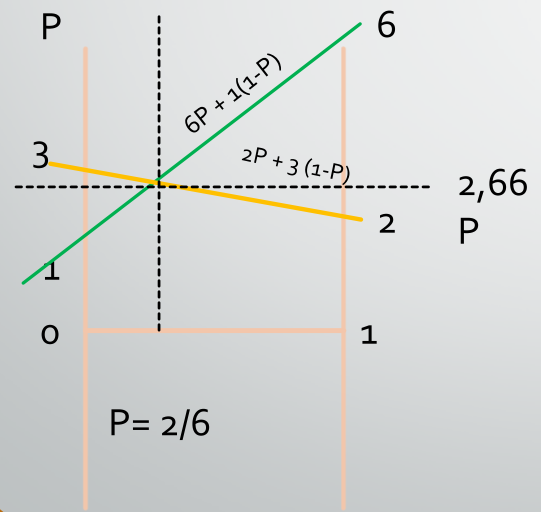
Ejemplo: estrategias mixtas. Resolución Gráfica

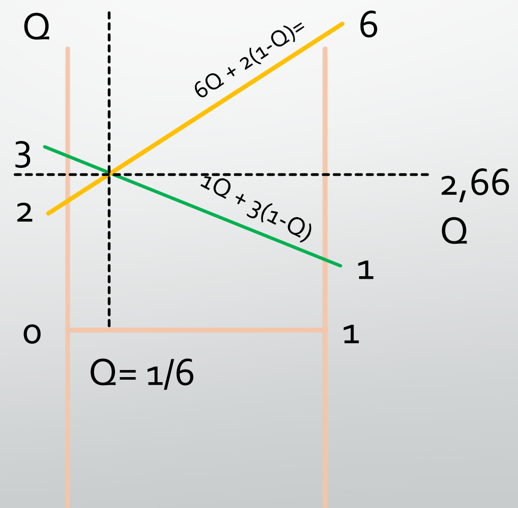
Jugador 1	Jugador 2		
	6	1	Q
	2	3	1- Q
	P	1- P	

Armando un sistema de ecuaciones:

$6P + 1(1-P) = 2P + 3\ (1-P)$ despejando $P= 2/6$

$6Q + 2(1-Q)= 1Q + 3(1-Q)$ despejando $Q= 1/6$





Glosario

Teoría de juegos Estudio de las situaciones de decisión en las cuales dos o más jugadores compiten como adversarios. La combinación de estrategias elegidas por los jugadores determina el valor del juego para cada uno.

Juego de suma cero para dos personas Juego con dos jugadores en el cual la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro.

Problemas **175**

Punto de equilibrio Condición que existe cuando las estrategias puras son óptimas para ambos jugadores en un juego de dos personas con suma cero. El punto de equilibrio ocurre en la intersección de las estrategias óptimas para los jugadores y su valor es el valor del juego.

Estrategia pura Solución del juego que proporciona una única mejor estrategia para cada jugador.

Estrategia mixta Solución en la cual el jugador selecciona al azar la estrategia para jugar entre varias estrategias con probabilidades positivas. La solución para el juego de estrategia mixta identifica las probabilidades que cada jugador debe utilizar para seleccionar al azar la estrategia a jugar.

Estrategia dominada Una estrategia es dominada por otra si esta última es al menos tan buena como la primera, para cada estrategia que el jugador opuesto puede emplear. Un jugador nunca seleccionará una estrategia y, por tanto, puede eliminarse con el fin de reducir el tamaño del juego.

¿Cuál es el valor del juego?

		Jugador B		
		b_1	b_2	b_3
Jugador A	a_1	8	5	7
	a_2	2	4	10

Dos estaciones de televisión en un mercado compiten por el público. Las opciones de programación local para el horario de transmisión del fin de semana a las 5:00 P.M. incluyen el reestreno de una comedia, un noticiero o un programa de mejoras para el hogar. Suponga que cada estación tiene las mismas opciones de programación y debe hacer su selección de programas pretemporada antes de saber qué hará la otra estación de televisión. Los cambios en miles de espectadores para la audiencia de la estación A son los siguientes:

		Estación B		
		Reestreno de comedia b_1	Noticias b_2	Mejoras para el hogar b_3
Estación A	Reestreno de comedia, a_1	10	5	3
	Noticias, a_2	8	8	6
	Mejoras para el hogar, a_3	4	7	3

Determine la estrategia de programación óptima para cada situación. ¿Cuál es el valor del juego?

Dos candidatos a la senaduría estatal por Indiana deben decidir cuál ciudad visitar el día antes de la elección de noviembre. Las mismas cuatro ciudades —Indianápolis, Evansville, Fort Wayne y South Bend— están disponibles para los dos candidatos y se listan como las estrategias 1 a 4 para cada candidato. Los planes de viaje deben hacerse por adelantado, así que los candidatos deben decidir cuál ciudad visitar antes de conocer los planes del otro candidato. Los valores de la tabla siguiente muestran los miles de votantes para el candidato republicano con base en las estrategias seleccionadas por ambos candidatos. ¿Cuál ciudad debe visitar cada candidato y cuál es el valor del juego?

		Candidato demócrata			
		Indianapolis b_1	Evansville b_2	Fort Wayne b_3	South Bend b_4
Candidato republicano	Indianapolis, a_1	0	−15	−8	20
	Evansville, a_2	30	−5	5	−10
	Fort Wayne, a_3	10	−25	0	20
	South Bend, a_4	20	20	10	15

		Jugador B		
		b_1	b_2	b_3
	a_1	0	−1	2
Jugador A	a_2	5	4	−3
	a_3	2	3	−4

a. Utilice la dominancia para reducir el juego a uno de 2×2. ¿Cuáles estrategias son dominadas?

b. Determine la solución de estrategia mixta óptima.

c. ¿Cuál es el valor del juego?

Dos empresas compiten por su participación en el mercado de las bebidas refrescantes. Cada una trabajó con una agencia de publicidad con el fin de desarrollar estrategias de publicidad alterna para el año próximo. Una variedad de anuncios por televisión, promociones de productos, vitrinas en tiendas, etc., proporciona cuatro estrategias diferentes para cada empresa. La tabla siguiente resume el cambio proyectado en la participación de mercado para la empresa A una vez que las dos empresas seleccionen su estrategia de publicidad para el año próximo. ¿Cuál es la solución óptima a este juego para cada uno de los jugadores? ¿Cuál es el valor del juego?

		Empresa B			
		b_1	b_2	b_3	b_4
	~~a_1~~	~~3~~	~~0~~	~~2~~	~~4~~
Empresa A	~~a_2~~	~~2~~	~~−2~~	~~1~~	~~0~~
	a_3	4	2	5	6
	a_4	−2	6	−1	0

martes, 12 de mayo de 2020 15:52

Q	4	2	8/10
1- Q	-2	6	2/10
	P	1-P	
	4/10	6/10	

$4Q - 2(1-Q) = 2Q + 6\,(1-Q)$

$Q = 8/10$

$4P + 2\,(1-P) = -2P + 6\,(1-P)$