

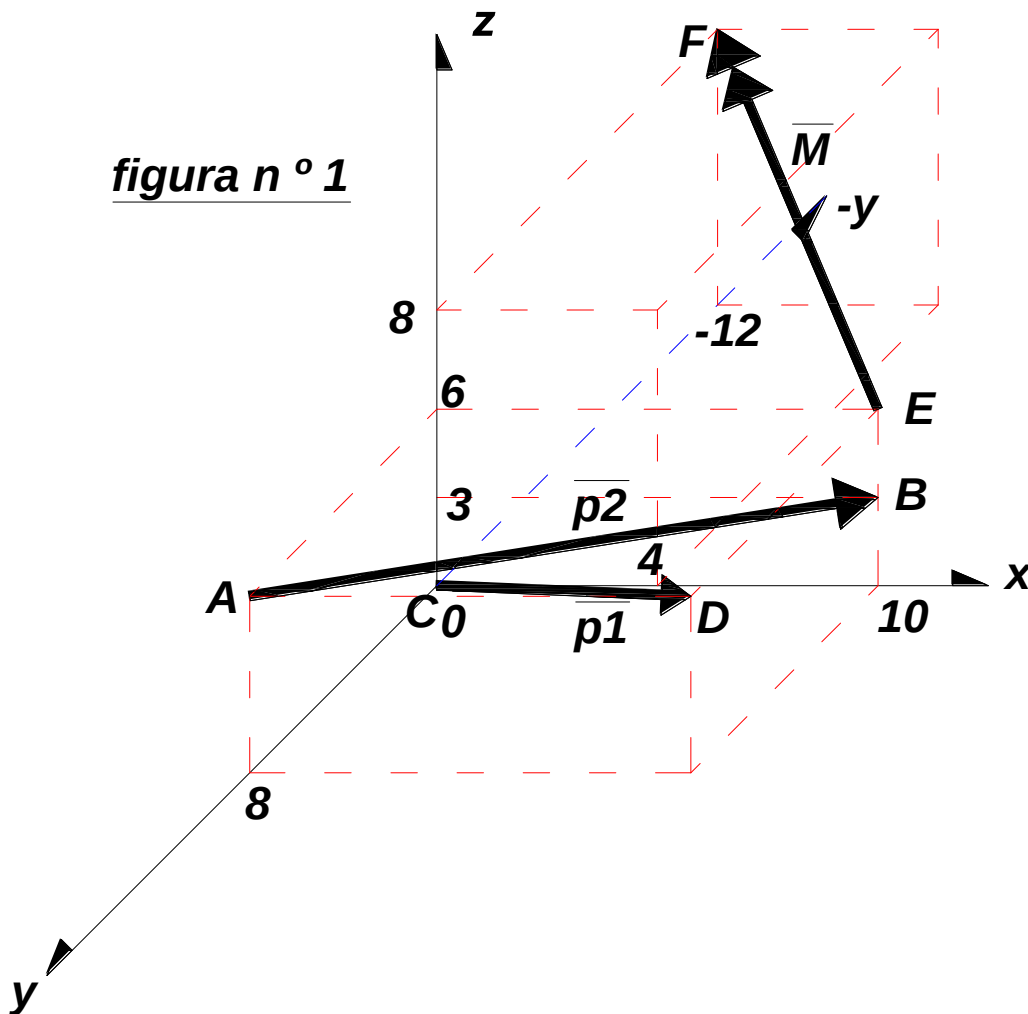
DETERMINACIÓN DE UN PUNTO DEL EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE FUERZAS

Considerando el sistema de la figura, se pide,

* Determinar un punto del eje central del sistema de la figura n ° 1, sabiendo que,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{p_1}| = 30\text{Kgf} \\ |\overrightarrow{p_2}| = 50\text{Kgf} \\ |\overrightarrow{M}| = 250\text{Kgf.m} \end{cases}$$

figura n ° 1

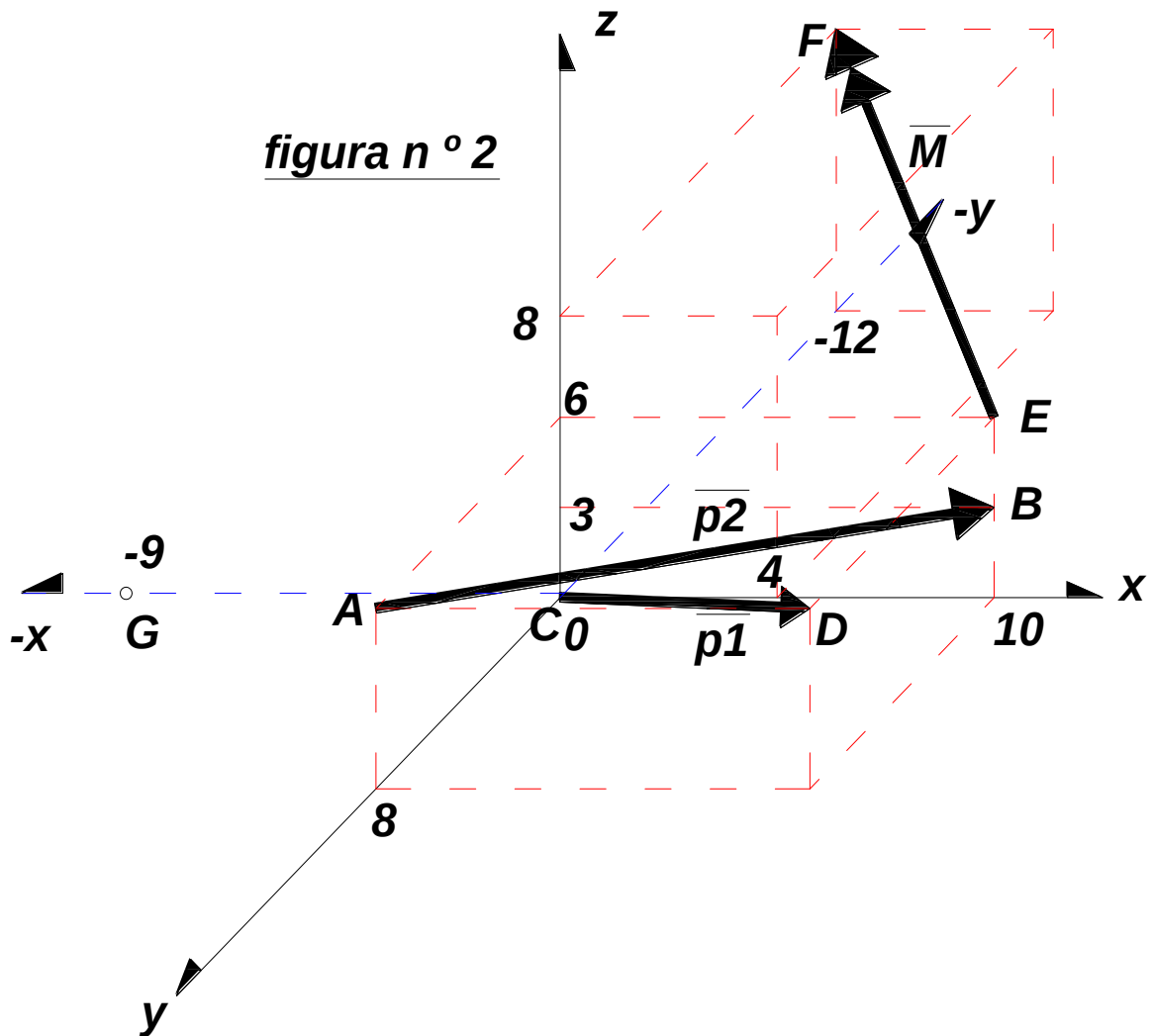


Apunte redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Determinamos en primera instancia los cosenos directores de de las fuerzas y momento, y expresaremos los vectores fuerza y momento en forma vectorial.

$$(A) \begin{cases} \vec{p}_1 = \overrightarrow{CD} \rightarrow \vec{p}_1 = 30Kgf \left(\frac{10}{10\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{8}{10\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{6}{10\sqrt{2}} \vec{k} \right) \\ \vec{p}_2 = \overrightarrow{AB} \rightarrow \vec{p}_2 = 50Kgf \left(\frac{10}{\sqrt{173}} \vec{i} - \frac{8}{\sqrt{173}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{173}} \vec{k} \right) \\ \vec{M} = \overrightarrow{EF} \rightarrow \vec{M} = 250Kgf.m \left(-\frac{10}{2\sqrt{62}} \vec{i} - \frac{12}{2\sqrt{62}} \vec{j} - \frac{2}{2\sqrt{62}} \vec{k} \right) \end{cases}$$

Elegimos un punto arbitrario como centro de reducción, por ejemplo el punto $G(-9;0;0)$ de la figura n º 2.



Luego, el momento de reducción a G , resulta,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{M_R^G} &= \overrightarrow{M} + \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{p_2} \times \overrightarrow{AG} \\
 \overrightarrow{M_R^G} &= 250 \text{Kgf.m} \left(-\frac{10}{2\sqrt{62}} \check{i} - \frac{12}{2\sqrt{62}} \check{j} - \frac{2}{2\sqrt{62}} \check{k} \right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 10 & 8 & 6 \\ -9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{Kgf.m} + \\
 (B) \quad &+ \frac{50}{\sqrt{173}} \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 10 & -8 & -3 \\ -9 & -8 & -6 \end{vmatrix} \text{Kgf.m} \\
 &\text{operando algebraica mente, resulta,} \\
 \overrightarrow{M_R^G} &= (-67,51\check{i} + 120,93\check{j} - 456,8\check{k}) \text{Kgf.m}
 \end{aligned}$$

Mientras que la resultante de reducción $\overrightarrow{R_R}$, resulta,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{R_R} &= \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \\
 (C) \quad \overrightarrow{R_R} &= 30 \text{Kgf} \left(\frac{10}{10\sqrt{2}} \check{i} + \frac{8}{10\sqrt{2}} \check{j} + \frac{6}{10\sqrt{2}} \check{k} \right) + 50 \text{Kgf} \left(\frac{10}{\sqrt{173}} \check{i} - \frac{8}{\sqrt{173}} \check{j} - \frac{3}{\sqrt{173}} \check{k} \right) \\
 \overrightarrow{R_R} &= (59,23\check{i} - 13,44\check{j} + 1,324\check{k}) \text{Kgf}
 \end{aligned}$$

De aquí, la mínima expresión mecánica equivalente en **G** es,

$$(D) \quad \begin{cases} \overrightarrow{M_R^G} = (-67,51\check{i} + 120,93\check{j} - 456,8\check{k}) \text{Kgf.m} \\ \overrightarrow{R_R} = (59,23\check{i} - 13,44\check{j} + 1,324\check{k}) \text{Kgf} \end{cases}$$

Ahora bien, si llamamos $H(x_H; y_H; z_H)$ a un punto del eje central, Podemos escribir,

$$(E) \quad \overrightarrow{M_R^H} = \overrightarrow{M_R^G} + \overrightarrow{R_R} \times \overrightarrow{(H-G)} = k \cdot \overrightarrow{R_R}$$

Reemplazando valores en (E), resulta,

$$(F) \quad \begin{cases} \overrightarrow{M_R^H} = (-67,51\check{i} + 120,93\check{j} - 456,8\check{k}) \text{Kgf.m} + \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 59,23 & -13,44 & 1,324 \\ x_H + 9m & y_H & z_H \end{vmatrix} \text{Kgf} = \\ = k \cdot (59,23\check{i} - 13,44\check{j} + 1,324\check{k}) \end{cases}$$

De (F) surge el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -67,51Kgf.m - 13,44 z_H Kgf - 1,324 y_H Kgf = k.59,23Kgf & (G1) \\ 120,93Kgf.m + 1,324(x_H + 9m)Kgf - 59,23 z_H Kgf = k(-13,44)Kgf & \text{resultando de esta,} \\ (G) \begin{cases} 132,85Kgf.m + 1,324 x_H - 59,23 z_H = k(-13,44)Kgf & (G2) \\ -456,8Kgf.m + 59,23 y_H Kgf + 13,44(x_H + 9m)Kgf = k.1,324Kgf & \text{de aquí,} \\ -335,84Kgf.m + 13,44 x_H Kgf + 59,23 y_H Kgf = k.1,324Kgf & (G3) \end{cases} \end{cases}$$

De la eliminación de k del sistema anterior, surgen,

$$(H) \begin{cases} \frac{-67,51.m - 13,44 z_H - 1,324 y_H}{59,23} = k & (H1) \\ \frac{132,85m + 1,324 x_H - 59,23 z_H}{-13,44} = k & (H2) \\ \frac{-335,84.m + 13,44 x_H + 59,23 y_H}{1,324} = k & (H3) \end{cases}$$

Ahora, de igualar las ecuaciones $(H1) = (H2)$, $(H1) = (H3)$, y $(H2) = (H3)$, resultando,

$$(I) \begin{cases} -1,14m - 0,227 z_H - 0,022 y_H = -9,88m - 0,0985 x_H + 4,407 z_H & \text{quedando,} \\ -0,0985 x_H - 0,022 y_H - 4,634 z_H + 6,97m = 0 & (I1) \\ -1,14m - 0,227 z_H - 0,022 y_H = -253,66m + 10,15 x_H + 44,74 y_H & \text{quedando,} \\ -10,15 x_H - 44,762 y_H - 0,227 z_H + 252,52m = 0 & (I2) \\ -9,88m - 0,0985 x_H + 4,407 z_H = -253,66m + 10,15 x_H + 44,74 y_H & \text{quedando} \\ -10,2485 x_H - 44,74 y_H + 4,407 z_H + 243,78m = 0 & (I3) \end{cases}$$

Las ecuaciones (I1), (I2), e (I3), conforman el siguiente sistema:

$$(J) \begin{cases} -0,0985 x_H - 0,022 y_H - 4,634 z_H + 6,97m = 0 \\ -10,15 x_H - 44,762 y_H - 0,227 z_H + 252,52m = 0 \\ -10,2485 x_H - 44,74 y_H + 4,407 z_H + 243,78m = 0 \end{cases}$$

El sistema (J) es compatible indeterminado, con lo cual, como es de esperar, tiene infinitas soluciones. Por consiguiente, como se nos pide determinar un punto del eje central, elegimos arbitrariamente una coordenada del mismo, por ejemplo $y_H = 0$, es decir, donde el eje intercepta el plano $x; z$, y determinamos la otra coordenada con dos ecuaciones cualesquiera del sistema (J). Entonces,

$$(K) \begin{cases} -10,15 X_H - 44,762.0 - 0,227 Z_H + 252,52m = 0 \\ -0,0985 X_H - 0,022.0 - 4,634 Z_H + 6,97m = 0 \\ \text{de aquí, } \rightarrow X_H = 24,86m \text{ ; } Z_H = 0,976m \end{cases}$$

El punto del eje central $H(24,86;0;0,976)m$