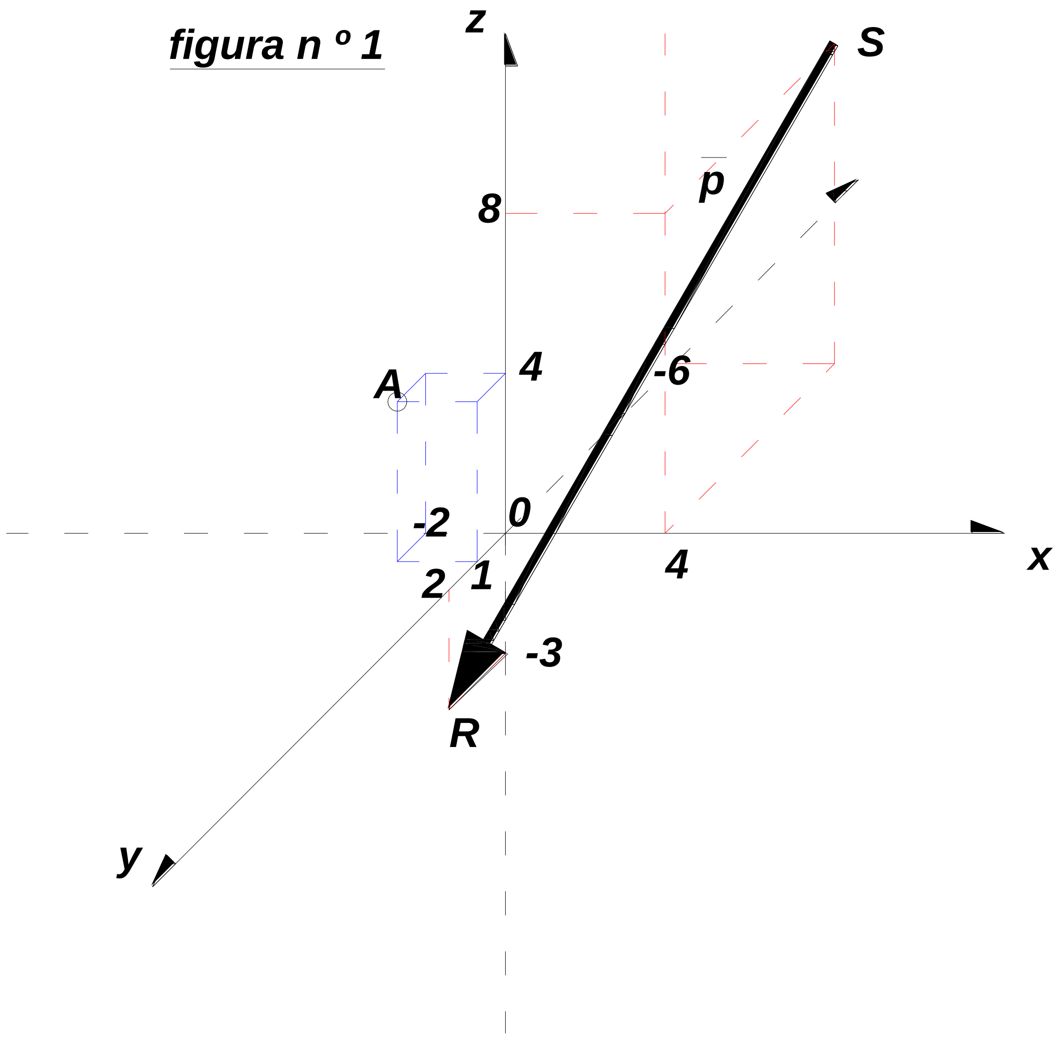
Ejercicios de ejemplo para Estructuras Ferroviarias 1

1 º) Determinación del momento $\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}$ de una fuerza $\vec{p} = 10N$ respecto del punto $A(-2;1;4)$, mostrado en la figura n º 1, debiéndose verificar el mismo considerando dos puntos arbitrarios de la recta de acción de $\vec{p}$, extrayendo conclusiones de los resultados obtenidos.



El vector $\overrightarrow{SR}$ representativo de $\vec{p}$ lo obtenemos determinando los cosenos directores del mismo. Siendo las coordenadas del extremo y origen respectivamente,

$$(A1)\begin{cases} R(0;2;-3) \\ S(4;-6;8) \end{cases}$$

Entonces, $\vec{p} = \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{R-S}$

Se deben determinar las componentes de $\overrightarrow{R-S}$ y sus cosenos directores, de donde,

$$(B1)\begin{cases} x_R - x_S = (0-4)\breve{i} = -4\breve{i}\,cm \\ y_R - y_S = (2+6)\breve{j} = 8\breve{j}\,cm \\ z_R - z_S = (-3-8)\breve{k} = -11\breve{k}\,cm \end{cases}$$

Cuyo módulo $\left|\overrightarrow{R-S}\right|$ es,

$$(C1) \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{R-S}}\right| = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2 + (z_R - z_S)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2 + (-11)^2}$$

De donde,

$$(D1) \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{R-S}}\right| = \sqrt{201}\,cm$$

El versor $\breve{e}$ que dirige $\vec{p}$ es,

$$(E1) \quad \breve{e} = -\frac{4}{\sqrt{201}}\breve{i} + \frac{8}{\sqrt{201}}\breve{j} - \frac{11}{\sqrt{201}}\breve{k}$$

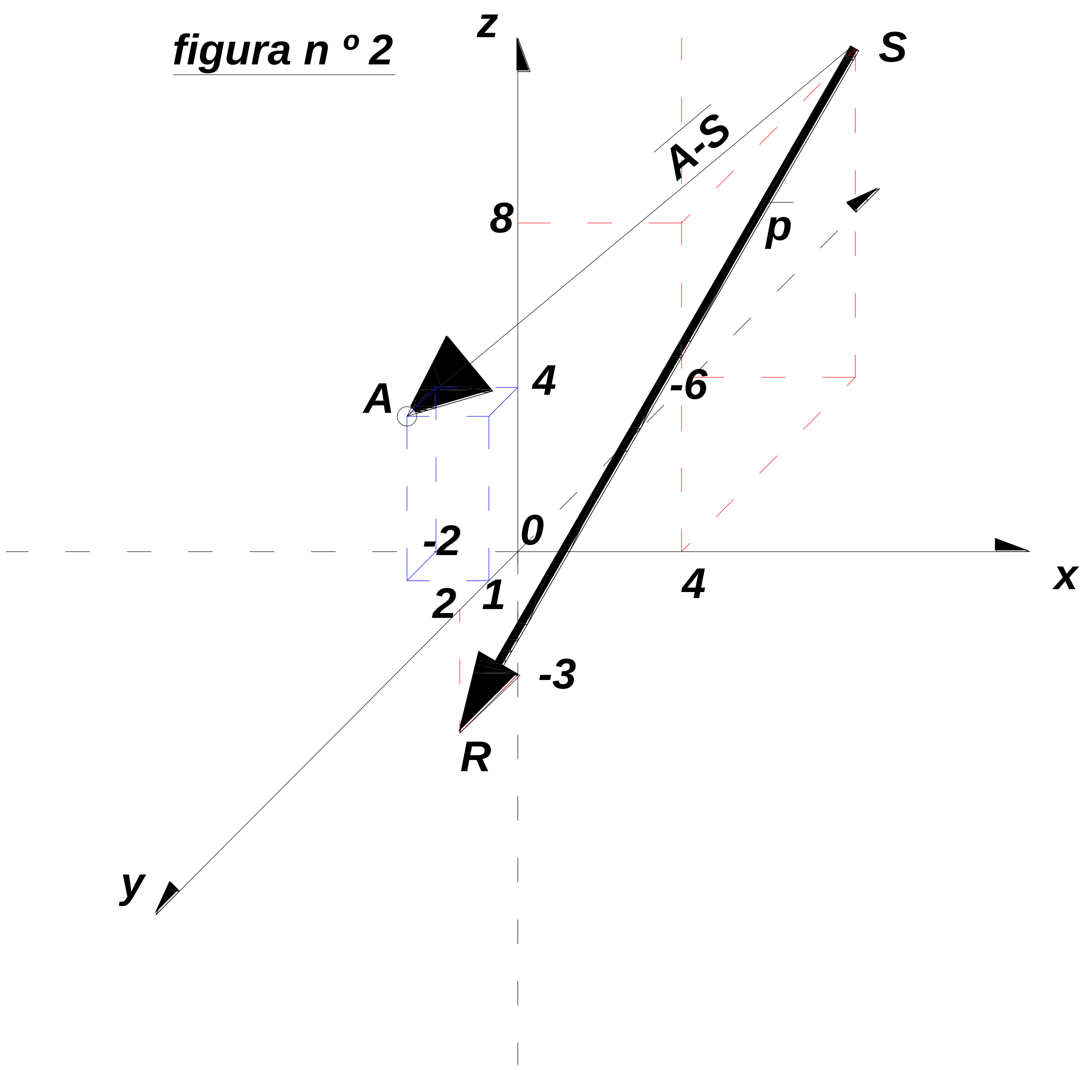
ahora, la expresión vectorial de $\vec{p}$ es,

$$(F1) \quad \vec{p} = 10N\left(-\frac{4}{\sqrt{201}}\breve{i} + \frac{8}{\sqrt{201}}\breve{j} - \frac{11}{\sqrt{201}}\breve{k}\right)$$

Donde las componentes de $\vec{p}$ son,

$$(G1)\begin{cases} p_x = -\dfrac{40}{\sqrt{201}}N \\ p_y = \dfrac{80}{\sqrt{201}}N \\ p_z = -\dfrac{110}{\sqrt{201}}N \end{cases}$$

Primeramente consideramos el radio vector $\overrightarrow{SA}$, y calculamos el momento $\overrightarrow{M^{A}_{\vec{p}}}$. Mostramos en la figura n º 2.



Para realizar el producto vectorial solicitado, determinamos las componentes del vector $\overrightarrow{SA}$.

$$(H1)\begin{cases} SA_x = (x_A - x_S) = -2 - 4 = -6cm \\ SA_y = (y_A - y_S) = 1 + 6 = 7cm \\ SA_z = (z_A - z_S) = 4 - 8 = -4cm \end{cases}$$

A continuación, determinamos el momento $\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}$ solicitado.

$$(I1) \qquad \overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ SA_x & SA_y & SA_z \end{vmatrix} = \frac{10N}{\sqrt{201}} \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -4 & 8 & -11 \\ -6 & 7 & -4 \end{vmatrix} cm$$

Resultando de la operación,

$$(J1)\quad \overrightarrow{\mathrm{M}_{\vec{\mathrm{p}}}^{\mathrm{A}}} = \frac{50N.cm}{\sqrt{201}}\left(9\breve{i} + 10\breve{j} + 4\breve{k}\right)$$

Sus componentes son,

$$(K1)\begin{cases} M_x^A = \dfrac{450}{\sqrt{201}} \\ M_y^A = \dfrac{500}{\sqrt{201}} \\ M_z^A = \dfrac{200}{\sqrt{201}} \end{cases}$$

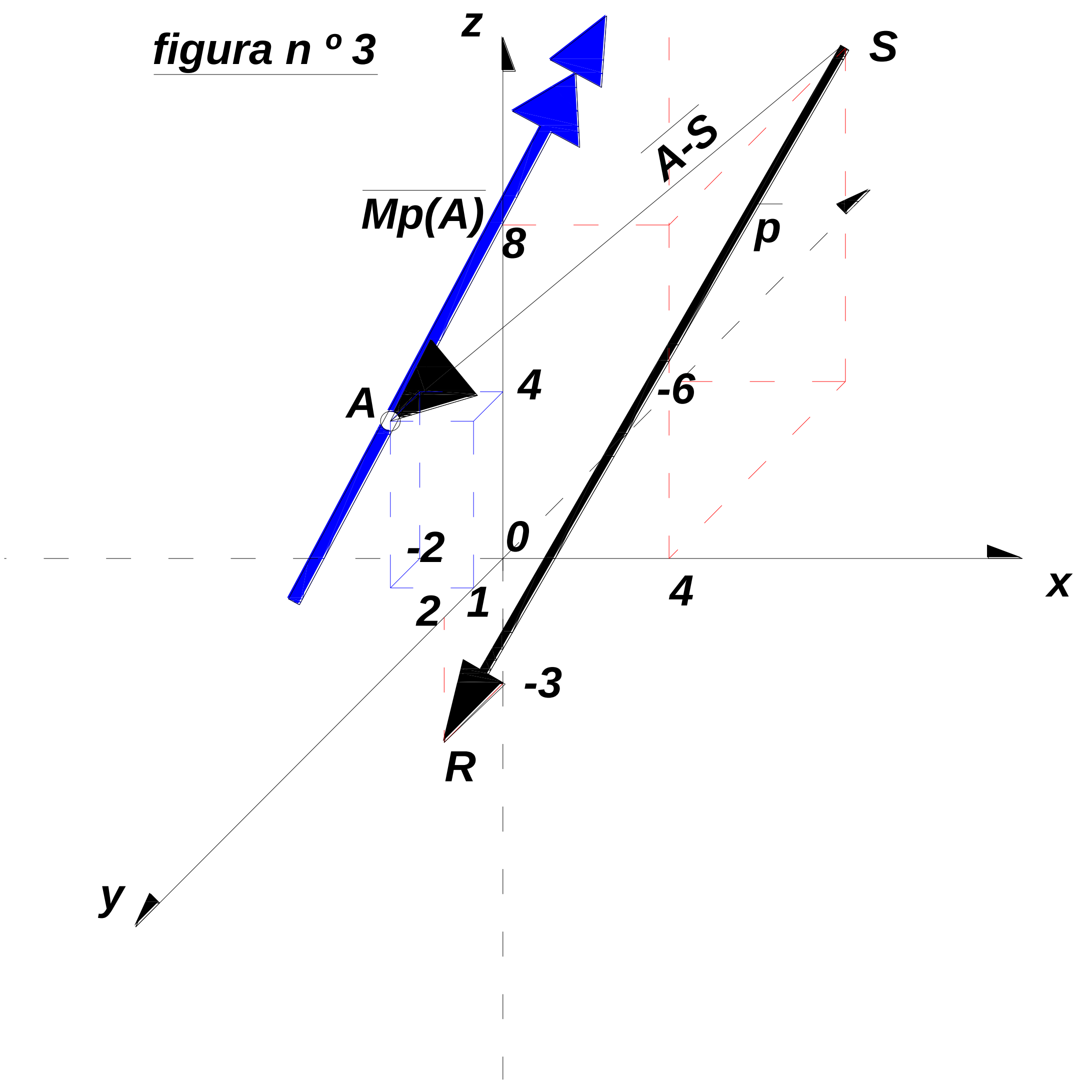
El módulo del vector momento es,

$$(L1)\begin{cases} \left|\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}\right| = \sqrt{\left(M_x^A\right)^2 + \left(M_y^A\right)^2 + \left(M_z^A\right)^2} \\ \left|\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}\right| = \dfrac{50}{\sqrt{201}}Ncm\sqrt{9^2 + 10^2 + 4^2} = 50\sqrt{\dfrac{197}{201}}Ncm \end{cases}$$

Sus cosenos directores resultan,

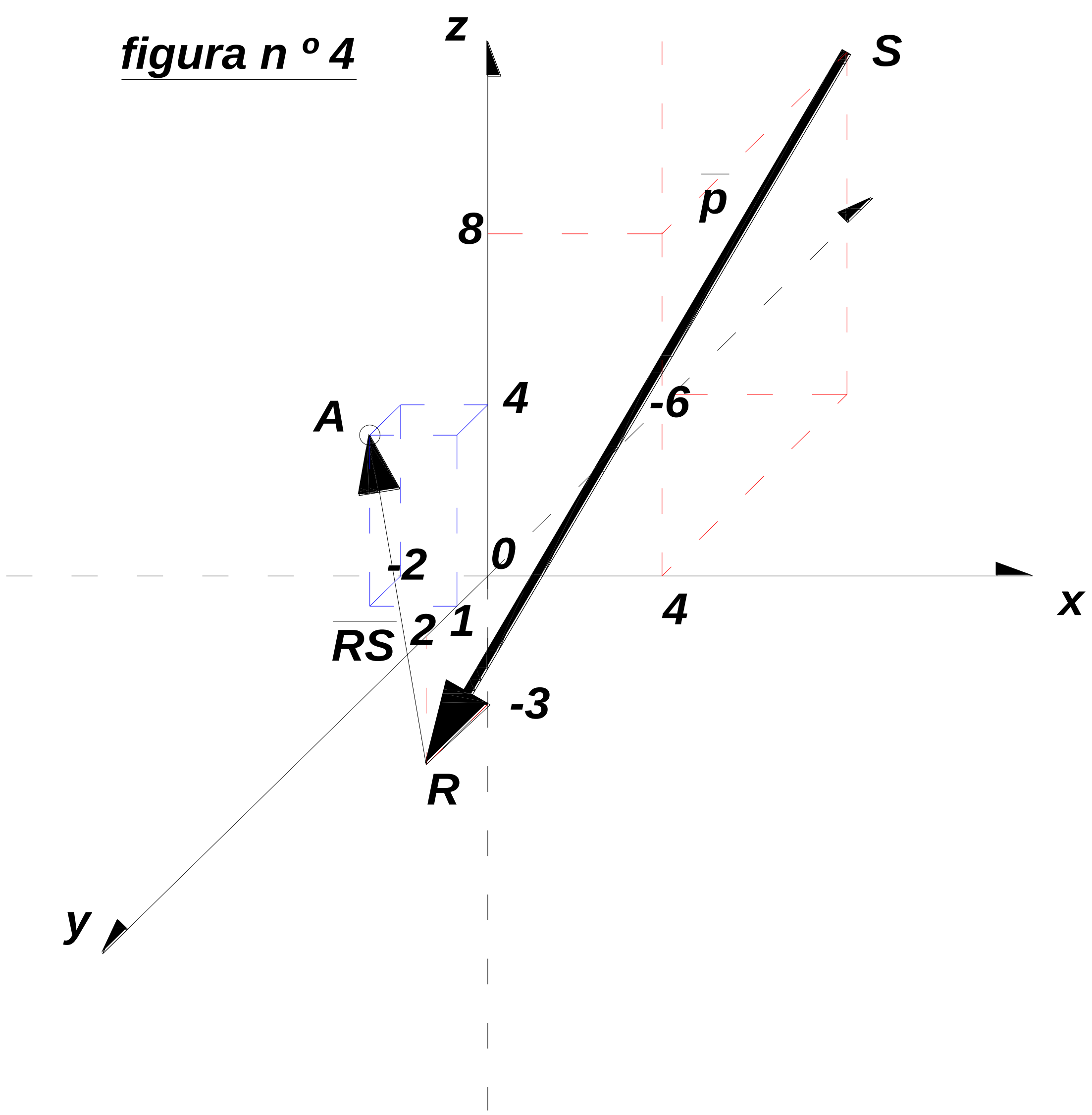
$$(M1)\begin{cases} l = \cos\alpha_{\mathrm{Mp}} = \dfrac{M_x^A}{\left|\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}\right|} = \dfrac{\frac{450}{\sqrt{201}}}{50\frac{\sqrt{197}}{\sqrt{201}}} = \dfrac{9}{\sqrt{197}} \\ \mathrm{m} = \cos\beta_{\mathrm{Mp}} = \dfrac{M_y^A}{\left|\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}\right|} = \dfrac{\frac{500}{\sqrt{201}}}{50\frac{\sqrt{197}}{\sqrt{201}}} = \dfrac{10}{\sqrt{197}} \\ n = \cos\gamma_{\mathrm{Mp}} = \dfrac{M_z^A}{\left|\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}\right|} = \dfrac{\frac{200}{\sqrt{201}}}{50\frac{\sqrt{197}}{\sqrt{201}}} = \dfrac{4}{\sqrt{197}} \end{cases}$$

En la figura n º 3 graficamos el vector momento $\overrightarrow{M_{\vec{p}}^{A}}$.



A continuación, determinamos el momento $\overrightarrow{M_{\frac{A}{p}}}$ considerando el radio vector $\overrightarrow{RA}$ como mostramos en la figura n º 4.

figura n º 4



Nos basta determinar las componentes del radio vector $\overrightarrow{RA}$ como $\overrightarrow{A-R}$.

$$(N1)\begin{cases} RA_x = (-2-0) = -2 \\ RA_y = (1-2) = -1 \\ RA_z = (4+3) = 7 \end{cases}$$

Con lo que el vector posición nos queda expresado como,

$$(O1) \qquad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = -6\breve{i} - 1\breve{j} + 7\breve{k}$$

En consecuencia, el momento $\overrightarrow{M_{\frac{A}{p}}}$ queda,

$$(P1) \qquad \overrightarrow{M}_{\vec{p}}^{A} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ RA_x & RA_y & RA_z \end{vmatrix} = \frac{10N}{\sqrt{201}} \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -4 & 8 & -11 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix} cm$$

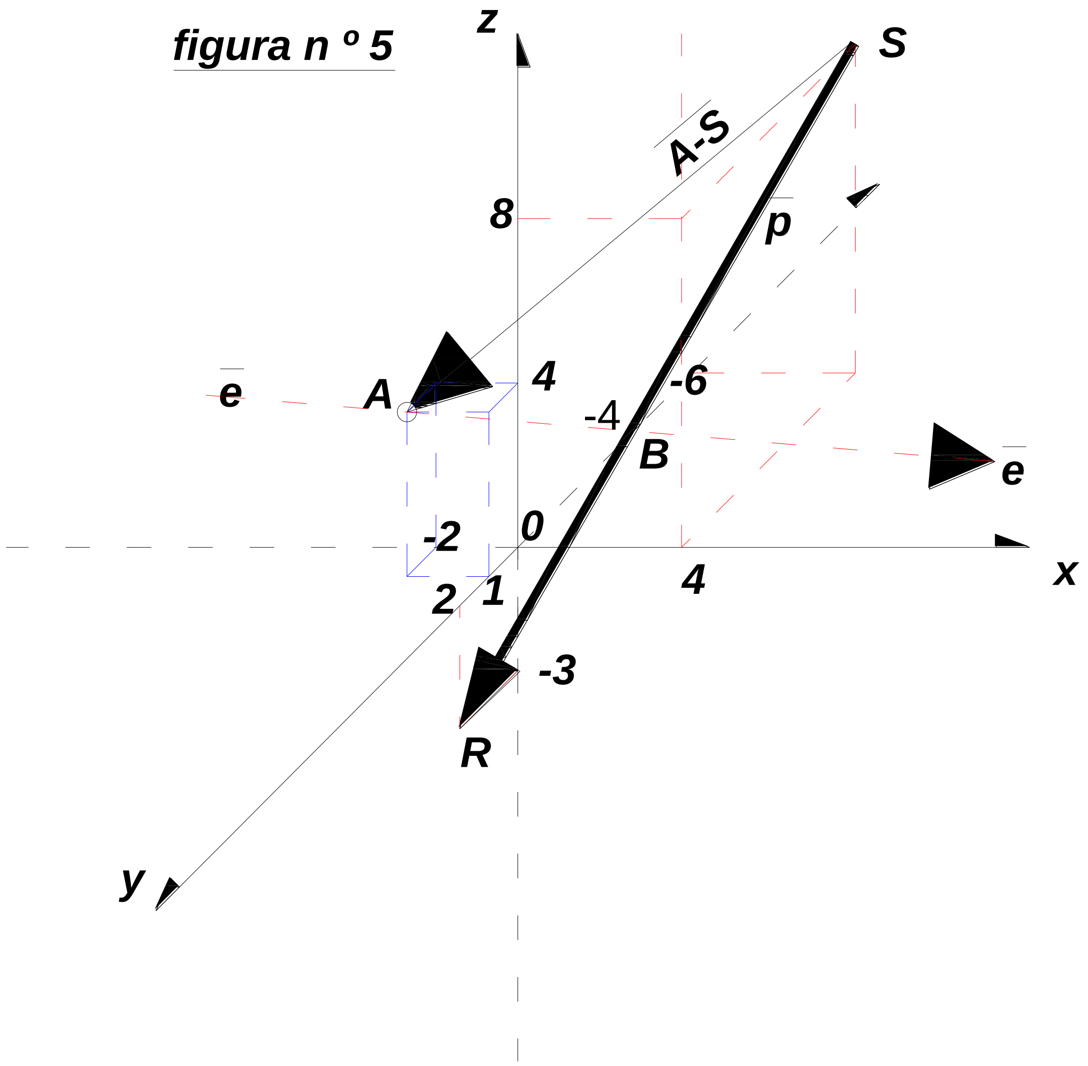
Finalmente,

$$(Q1) \qquad \overrightarrow{M}_{\vec{p}}^{A} = \frac{10N}{\sqrt{201}}\left(45\breve{i} + 50\breve{j} + 20\breve{k}\right) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{M}_{\vec{p}}^{A} = \frac{50Ncm}{\sqrt{201}}\left(9\breve{i} + 10\breve{j} + 4\breve{k}\right)$$

Según podemos concluir de (J1) y (Q1), el momento $\overrightarrow{M}_{\vec{p}}^{A}$ es independiente del origen del radio vector que se elija en la recta de acción de $\vec{p}$. ¿Por qué?

2 º) Determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje. Considerar el ejercicio n º 1, y determinar el momento de la fuerza $\vec{p}$ respecto del eje $\overrightarrow{AB}$, siendo las coordenadas de $B(0;-4;0)$, como indicamos en la figura n º 5.

figura n º 5



Para determinar el momento de $\vec{p}$ respecto del eje $\overrightarrow{e-e}$, debemos determinar previamente los cosenos directores del eje $\overrightarrow{AB}$. Siendo

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B-A} = [0-(-2)]\breve{i} + (-4-1)\breve{j} + (0-4)\breve{k} = 2\breve{i} - 5\breve{j} - 4\breve{k} \quad (A2)$$

cuyos cosenos directores son,

$$(B2)\begin{cases} e_x = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} \\ e_y = \dfrac{-5}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}} = -\dfrac{5}{3\sqrt{5}} \\ e_z = \dfrac{-4}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} \end{cases}$$

Luego, el versor $\breve{e}$ queda expresado,

$$(C2) \quad \breve{e} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\left(2\breve{i} - 5\breve{j} + 4\breve{k}\right)$$

Entonces, el momento de $\vec{p}$ respecto del eje $\overrightarrow{e-e}$ se expresa,

$$(D2) \quad M_{\vec{p}}^{e-e} = \vec{p}x\overrightarrow{SA}.\breve{e}$$

Considerando (J1),

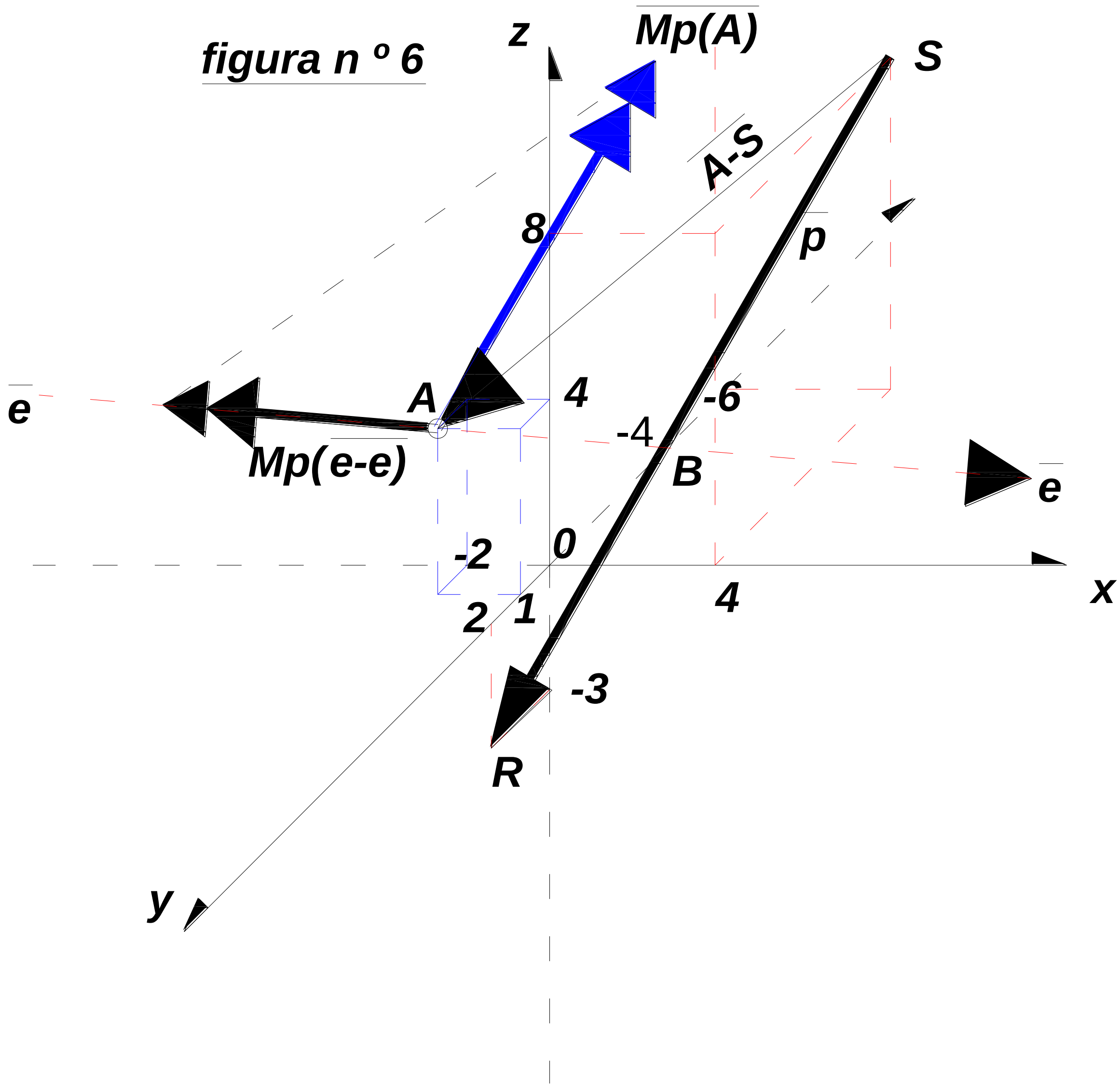
$$(E2) \quad M_{p}^{e\text{-}e} = \frac{50N.cm}{\sqrt{201}}\left(9\breve{i} + 10\breve{j} + 4\breve{k}\right).\frac{1}{3\sqrt{5}}.\left(2\breve{i} - 5\breve{j} + 4\breve{k}\right)$$

De donde resulta,

$$(F2) \quad M_{\vec{p}}^{e-e} = \frac{50}{3\sqrt{1005}}\left(18 - 50 + 16\right) = -\frac{800}{3\sqrt{1005}}$$

En la figura n º 6, representamos $M_{\vec{p}}^{e-e}$.

figura n º 6



3 º) Reducción de un sistema de fuerzas a un punto denominado centro de reducción. Reducir el sistema de fuerzas $\overrightarrow{p_i}$. al centro de reducción $C_R(-3;9;-5)$, indicando el invariante vectorial del sistema, conociendo dos puntos de las rectas de acción de los vectores representativos de estas fuerzas.

$$
datos\begin{cases}
\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = 20N & ;\ A_1(-2;0;5) \quad B_1(7;4;-2) \\
\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{A_2B_2} = 15N & ;\ A_2(1;-3;-3) \quad B_2(-5;1;-10) \\
\overrightarrow{p_3} = \overrightarrow{A_3B_3} = 50N & ;\ A_3(-3;7;-4) \quad B_3(5;5;-1) \\
\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{C_1D_1} = 350Ncm & ;\ C_1 = (6;-4;6) \quad D_1(9;5;-5) \\
\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{C_2D_2} = 500Ncm & ;\ C_2(0;-8;0) \quad D_2(-6;-6;-9)
\end{cases}
$$

En primer instancia, expresamos las fuerzas del sistema en forma vectorial calculando sus componentes.

$$(A3)\begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} = (7+2)\breve{i} + 4\breve{j} + (-2-5)\breve{k} = 9\breve{i} + 4\breve{j} - 7\breve{k} \\ \overrightarrow{A_2B_2} = -6\breve{i} + 4\breve{j} - 7\breve{k} \\ \overrightarrow{A_3B_3} = 8\breve{i} - 2\breve{j} + 3\breve{k} \\ \overrightarrow{C_1D_1} = 3\breve{i} + 9\breve{j} - 11\breve{k} \\ \overrightarrow{C_2D_2} = -6\breve{i} + 2\breve{j} - 9\breve{k} \end{cases}$$

Cuyos módulos de los vectores anteriores son,

$$(B3)\begin{cases} \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{146} \\ \left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{101} \\ \left|\overrightarrow{A_3B_3}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{77} \\ \left|\overrightarrow{C_1D_1}\right| = \sqrt{3^2 + 9^2 + (-11)^2} = \sqrt{211} \\ \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-9)^2} = \sqrt{121} \end{cases}$$

Las fuerzas expresadas en forma vectorial quedan,

$$(C3)\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = 10N\left(\frac{9}{\sqrt{146}}\breve{i} + \frac{4}{\sqrt{146}}\breve{j} - \frac{7}{\sqrt{146}}\breve{k}\right) \\ \overrightarrow{p_2} = 15N\left(-\frac{6}{\sqrt{101}}\breve{i} + \frac{4}{\sqrt{101}}\breve{j} - \frac{7}{\sqrt{101}}\breve{k}\right) \\ \overrightarrow{p_3} = 50N\left(\frac{8}{\sqrt{77}}\breve{i} - \frac{2}{\sqrt{77}}\breve{j} + \frac{3}{\sqrt{77}}\breve{k}\right) \\ \overrightarrow{M_1} = 350Ncm\left(\frac{3}{\sqrt{211}}\breve{i} + \frac{9}{\sqrt{211}}\breve{j} - \frac{11}{\sqrt{211}}\breve{k}\right) \\ \overrightarrow{M_2} = 500Ncm\left(-\frac{6}{\sqrt{121}}\breve{i} + \frac{2}{\sqrt{121}}\breve{j} - \frac{9}{\sqrt{121}}\breve{k}\right) \end{cases}$$

Siendo la resultante de reducción un invariante vectorial, la misma no depende del centro de reducción, siendo esta,

$$(D3)\quad \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}}=\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Donde sus componentes las obtenemos,

$$(E3)\begin{cases} R_{Rx}=\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\alpha_{\mathrm{i}} \\ R_{Rx}=\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\beta_{\mathrm{i}} \\ R_{Rz}=\sum_{i=1}^{n} p_i.\cos\gamma_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

Reemplazando valores en (E3), se tiene,

$$(F3)\begin{cases} R_{Rx}=\left(\frac{90}{\sqrt{146}}-\frac{90}{\sqrt{101}}+\frac{400}{\sqrt{77}}\right)N\cong 44{,}077N \\ R_{Ry}=\left(\frac{40}{\sqrt{146}}+\frac{60}{\sqrt{101}}-\frac{100}{\sqrt{77}}\right)N\cong -2{,}12N \\ R_{Rz}=\left(-\frac{70}{\sqrt{146}}-\frac{105}{\sqrt{101}}+\frac{150}{\sqrt{77}}\right)N\cong 0{,}853N \end{cases}$$

Entonces, el vector $\overrightarrow{R_R}$ nos queda expresado como,

$$(G3)\quad \overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}}=\left(44{,}077\breve{i}-2{,}12\breve{j}+0{,}853\breve{k}\right)N$$

cuyo módulo es,

$$(H3)\quad \begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}}\right|=\sqrt{(R_{Rx})^2+(R_{Ry})^2+(R_{Rz})^2} \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{R}}}\right|=\sqrt{(44{,}077)^2+(-2{,}12)^2+(0{,}853)^2}\,N\cong 44{,}136N \end{cases}$$

Cálculo de cosenos directores

$$(I3)\begin{cases} l = \cos\alpha_R = \dfrac{R_{Rx}}{\left|\overrightarrow{R_R}\right|} = \dfrac{44{,}077}{44{,}136} = 0{,}99866 & \rightarrow \quad \alpha_R = 2{,}966° \\ m = \cos\beta_R = \dfrac{R_{Ry}}{\left|\overrightarrow{R_R}\right|} = -\dfrac{2{,}12}{44{,}136} = -0{,}048 & \rightarrow \quad \beta_R = 92{,}751° \\ n = \cos\gamma_R = \dfrac{R_{Rz}}{\left|\overrightarrow{R_R}\right|} = \dfrac{0{,}853}{44{,}136} = 0{,}0193 & \rightarrow \quad \gamma_R = 88{,}894° \end{cases}$$

En cuanto al momento de reducción $\overrightarrow{M_R^{CR}}$, se tiene,

$$(J3) \quad \overrightarrow{M_R^{CR}} = \sum_{j=1}^{m}\overrightarrow{M_j} + \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{p_i} x \left(\overrightarrow{C_R - A_i}\right)$$

Cuyo desarrollo nos lleva a,

$$(K3)\begin{cases} \overrightarrow{M_R^{CR}} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{p_1} x\left(\overrightarrow{C_R - A_1}\right) + \overrightarrow{p_2} x\left(\overrightarrow{C_R - A_2}\right) + \overrightarrow{p_3} x\left(\overrightarrow{C_R - A_3}\right) \\ \overrightarrow{M_R^{CR}} = 350Ncm\left(\dfrac{3}{\sqrt{211}}\breve{i} + \dfrac{9}{\sqrt{211}}\breve{j} - \dfrac{11}{\sqrt{211}}\breve{k}\right) + 500Ncm\left(-\dfrac{6}{\sqrt{121}}\breve{i} + \dfrac{2}{\sqrt{121}}\breve{j} - \dfrac{9}{\sqrt{121}}\breve{k}\right) + \\ + \left[\dfrac{10}{\sqrt{146}}\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 9 & 4 & -7 \\ -1 & 9 & -10 \end{vmatrix} + \dfrac{15}{\sqrt{101}}\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -6 & 4 & -7 \\ -4 & 12 & -2 \end{vmatrix} + \dfrac{50}{\sqrt{77}}\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 8 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right] Ncm \\ \text{resultando,} \\ \overrightarrow{M_R^{CR}} \cong \left(-90{,}765\breve{i} + 457{,}5\breve{j} - 596{,}2\breve{k}\right)Ncm \end{cases}$$

Cuyas componentes son,

$$(L3)\begin{cases} M_{Rx}^{CR} = (-90{,}765)Ncm \\ M_{Ry}^{CR} = (457{,}5)Ncm \\ M_{Rz}^{CR} = (-596{,}2)Ncm \end{cases}$$

El módulo del mismo es,

$$(M3)\begin{cases} \left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right| = \sqrt{(M_{Rx}^{CR})^2 + (M_{Ry}^{CR})^2 + (M_{Rz}^{CR})^2} \\ \left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right| = \sqrt{(-90{,}765)^2 + (457{,}5)^2 + (-596{,}2)^2}\,Ncm \cong 757\,Ncm \end{cases}$$

Cosenos directores,

$$(N3)\begin{cases} \cos\alpha_{M} = \dfrac{M_{Rx}^{CR}}{\left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right|} = -\dfrac{90{,}765}{757} = -0{,}12 \quad \rightarrow \quad \alpha_{M} = 96{,}89° \\ \cos\beta_{M} = \dfrac{M_{Rx}^{CR}}{\left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right|} = \dfrac{457{,}5}{757} = 0{,}6043 \quad \rightarrow \quad \beta_{M} = 52{,}82° \\ \cos\gamma_{M} = \dfrac{M_{Rx}^{CR}}{\left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right|} = -\dfrac{596{,}2}{757} = -0{,}7876 \quad \rightarrow \quad \gamma_{M} = 141{,}96° \end{cases}$$

Para determinar el ángulo **ξ** entre $\overrightarrow{R_R}$ y $\overrightarrow{M_R^{CR}}$, de la expresión del producto escalar se deduce,

$$(O3)\begin{cases} \overrightarrow{R_R}\cdot\overrightarrow{M_{R}^{CR}} = \left|\overrightarrow{R_R}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right|.\cos\zeta \quad \text{de donde,} \\ \cos\zeta = \dfrac{\overrightarrow{R_R}\cdot\overrightarrow{M_{R}^{CR}}}{\left|\overrightarrow{R_R}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M_{R}^{CR}}\right|} \quad \rightarrow \\ \cos\zeta = \dfrac{(44{,}077\breve{i} - 2{,}12\breve{j} + 0{,}853\breve{k}).(-90{,}765\breve{i} + 457{,}5\breve{j} - 596{,}2\breve{k})}{44{,}136.757} = -0{,}164 \\ de\ \text{donde}\ \zeta = 99{,}44° \end{cases}$$