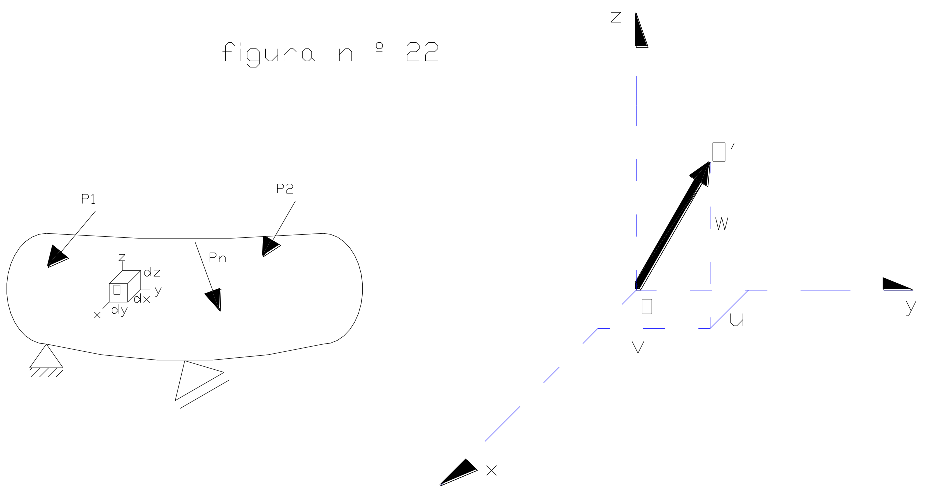
ESTADOS DE DEFORMACIÓN

INTRODUCCIÓN

Todo los cuerpos, cualquiera sea el material de construcción, deforman bajo la acción de fuerzas que se apliquen al mismo. Si se desea conocer el proceso de deformación de un cuerpo, será necesario analizar la deformación de un paralelepípedo elemental. Mostraremos que la deformación de un cubo elemental se puede descomponer en tres partes: una traslación, una rotación, y, la deformación pura o propiamente dicha. Las dos primeras originan el movimiento del cubo elemental dejando invariable la forma primitiva, mientras que la tercera, modifica la forma del cubo elemental como consecuencia de los desplazamientos de sus puntos materiales.

Deformación de un cubo elemental: Aislamos un cubo elemental de dimensiones **dx. dy. dz** *de un cuerpo sometido a un sistema de cargas, como indica la figura n º 22, y con vértice del cubo en el punto* ***O****. Siendo el desplazamiento del punto* ***O****, la magnitud* $\overline{OO'}$*, definido por las posiciones del punto* ***O*** *antes y después del desplazamiento. Las componentes del desplazamiento de dicho punto son: u, v, w.*



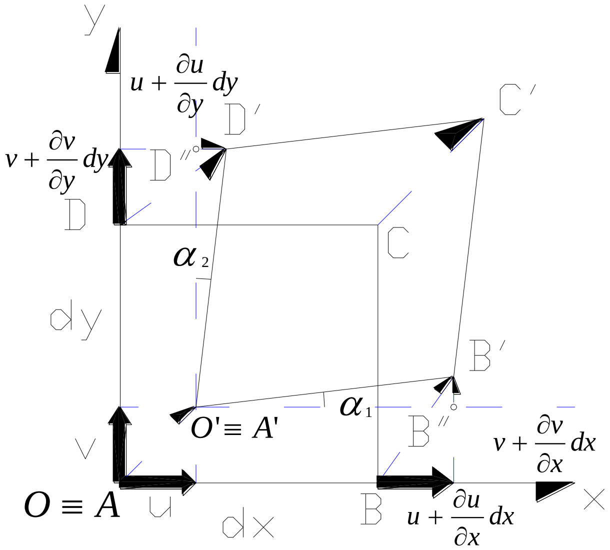
Los componentes del desplazamiento del punto ***O*** *y sus derivadas parciales son funciones continuas y uniformes, y sus valores son lo suficientemente pequeños como para ser considerados infinitésimos de primer orden. En consecuencia, las deformaciones originadas en puntos próximos a* ***O*** *son transformaciones lineales, y las expresiones algebraicas conservan su orden.*

Considerando un cubo elemental, que, por efecto de las tensiones, el mismo se deforma variando las longitudes de sus aristas y los ángulos diedros formados por sus caras. La variación de longitud de sus aristas, sea alargamiento o acortamiento, referida a su longitud inicial, la denominaremos ***deformación específica****, y la variación angular entre las aristas con respecto a la orientación inicial ortogonal, la denominaremos* ***distorsión****.*

Para facilitar la comprensión del tema, estudiaremos la deformación en el plano ***xy****, de una cara del paralelepípedo elemental, haciendo coincidir el vértice* ***A*** *con el origen de coordenadas* ***O****. Luego de la deformación, la cara lateral* ***ABCD*** *del cubo elemental, adopta la forma de la figura* ***A'B'C'D'*** *habiéndose modificado las longitudes de las aristas dx y dy, como se indica en la figura n º 23. Los vectores desplazamientos de los puntos son:* $\overline{AA'}$; $\overline{BB'}$; $\overline{CC'}$; $\overline{DD'}$*. Cada corrimiento tiene una componente sobre cada eje coordenado, siendo estos funciones continuas y derivables. Siendo* ***u*** *y* ***v*** *las componentes del corrimiento del punto A según x e y, los desplazamientos de los puntos B y D serán, respectivamente:*

$$\begin{cases} u_B = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx \\ v_B = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx \end{cases} \qquad \begin{cases} u_D = u + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \\ v_D = v + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy \end{cases}$$

figura n º 23



*Determinaremos, a continuación, los alargamientos específicos o desplazamientos por unidad de longitud. Estos alargamientos son iguales a la relación entre el incremento de longitud y la longitud inicial. Estos alargamientos los indicaremos con ε. En la dirección **x**, resulta:*

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u}{dx} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

*Con respecto a la dirección **y**, resulta:*

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v}{dy} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Análogamente en la dirección z resultará:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Quedándonos los alargamientos específicos con las siguientes ecuaciones:

$$\text{Ecuaciones 39}\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Consideraremos, a continuación, las distorsiones. Distinguiremos a las distorsiones con los subíndices correspondientes al plano considerado en donde se encuentran estas, y las indicaremos con γ*. En el plano* ***xy****, la distorsión será* γ_{xy}*. La distorsión* γ_{xy} *es igual a la suma de los ángulos* α_1 y α_2.
Tratándose de ángulos infinitesimales, resulta:

$$\alpha_1 \cong tg\left(\mathrm{B'\hat{O}'B''}\right) = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x}dx - v}{dx} \quad \rightarrow \alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Análogamente:

$$\alpha_2 \cong tg\left(D'\hat{O}'D''\right) = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} \quad \rightarrow \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Como $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$*, entonces:*

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Análogamente para los planos ***xz*** *e* ***yz****, corresponderán las siguientes distorsiones:*

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{plano xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{plano yz}$$

Conformándose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Ecuaciones\ 40 \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

En otras palabras, la deformación de la arista $\overline{OB}$ *del cubo elemental está compuesta de: una traslación* $\overline{OO'}$ *cuyas componentes son* ***u, v, w****; de una rotación alrededor de un eje que pasa por O', y de una deformación pura definida por la deformación lineal* ε_x.

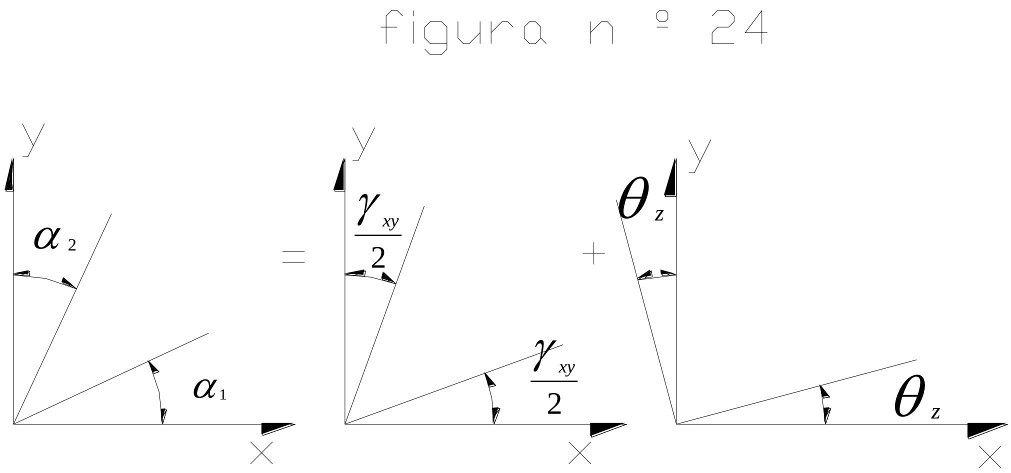
Consideramos las distorsiones como positivas cuando tienden a disminuir los ángulos rectos formados por las aristas correspondientes.

Los ángulos α_1 y α_2 *correspondientes a las proyecciones de distorsión en el plano xy, serán descompuestos de la siguiente forma:*

$$Ecuaciones\ 41 \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\gamma_{xy}}{2} + \theta_z \\ \alpha_2 = \frac{\gamma_{xy}}{2} - \theta_z \end{cases}$$

En la figura n º 24 mostramos un modelo para la interpretación de este concepto. En la misma, el ángulo ***B"O'D"*** *se considera como resultante de una deformación pura consistente en el giro de los lados* ***O'D"*** *y* ***O'B"*** *en sentidos opuestos de magnitud* $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ *cada uno de estos, sumada a una rotación* *alrededor de un eje que pasa por O', girando, en consecuencia, cada lado del cuadrado, y, en sentidos opuestos un ángulo* θ_z. *De las ecuaciones 41, obtenemos:*

$$\theta_z = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$$



Pero, sabemos que:

$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Resultando $\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

*Análogamente para los planos **xz** e **yz** resultarán:*

$$\theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{plano xz}$$

$$\theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{plano yz}$$

Llamaremos ecuaciones 42 al siguiente conjunto:

$$Ecuaciones\ 42 \begin{cases} \theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{cases}$$

*Resumiendo, el paralelepípedo elemental de aristas **AB, AD, AE** (normal a l plano **xy**), se transforma en un paralelepípedo oblicuo de aristas **A'B', A'D', A'E'** mediante la sucesión de transformaciones siguientes:*

- *a) una traslación* $\overline{AA'} = \overline{OO'}$ *que traslada el vértice **A** al punto **A'***

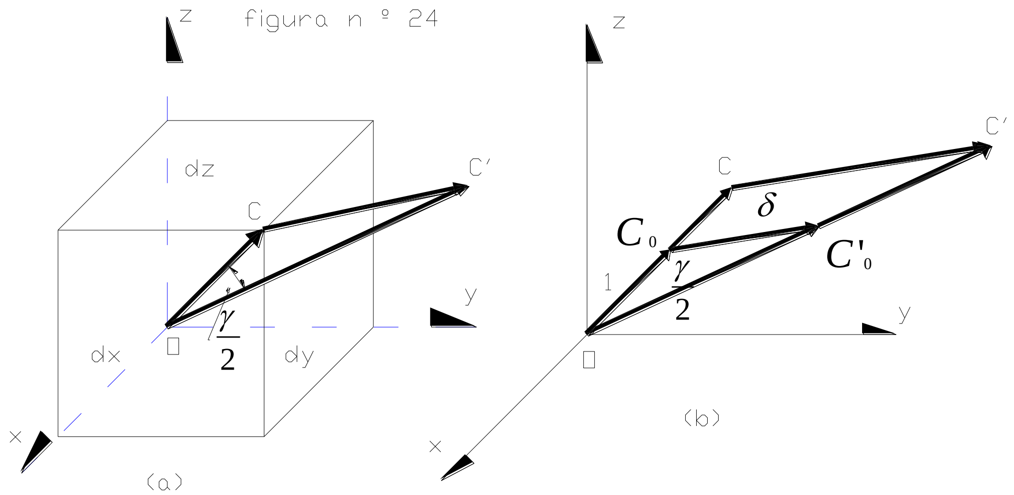
- *b) una rotación* $\vec{\theta}$ *, de componentes* $\vec{\theta}_x ; \vec{\theta}_y ; \vec{\theta}_z$ *, alrededor de un eje que pasa por el punto* ***O****.*
- *c) los alargamientos unitarios* $\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z$ *correspondientes a las aristas del paralelepípedo.*
- *d) las deformaciones angulares simétricas* $\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} ; \gamma_{zx}$ *de los ángulos rectos que forman las aristas del paralelepípedo.*

*Las transformaciones **a** y **b** corresponden al movimiento recto del paralelepípedo como sólido rígido, en tanto que, las transformaciones **c** y **d** corresponden a deformaciones puras definidas por las magnitudes:*

$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z ; \gamma_{xy} ; \gamma_{yz} ; \gamma_{zx}$.

*Finalizando, observamos que las deformaciones son funciones de **u, v, w**, y sus derivadas primeras, siendo, consecuentemente infinitésimos de primer orden.*

Concepto de deformación: *El cubo elemental mostrado en la figura n º 25 de vértice en O, cuyo vértice **C** se desplaza a la posición **C'** como consecuencia de la deformación experimentando el desplazamiento* $\overline{CC'}$*, y la diagonal* $\overline{OC}$ *girará un ángulo* $\frac{\gamma}{2}$*, cambiando su longitud a* $\overline{OC'}$.



Llamando $\overline{OC_0}$ *a un elemento lineal de longitud unitaria en la dirección* $\overline{OC}$ *(figura n º 24b). La deformación* δ *del elemento* $\overline{OC_0}$ *será igual al desplazamiento* $\overline{C_0C'_0}$ *correspondiente al punto* C_0*. Esto es:* $\vec{\delta} = C_0\vec{C'}_0$.

En la figura n º 25 mostramos un gráfico de la descomposición de la deformación δ *en sus componentes lineal y normal en las direcciones* $\overline{OC}$ *y normal respectivamente, denominándose las mismas como deformación longitudinal (* $\overline{C_0C_1}$*), y transversal (*$\overline{C_1C'_0}$*).*

Para esto, razonamos con los conceptos de deformaciones estudiados anteriormente con la finalidad de determinar estas componentes. Recordamos que $\frac{\gamma}{2}$ y ε_C *son infinitésimos de primer orden.*

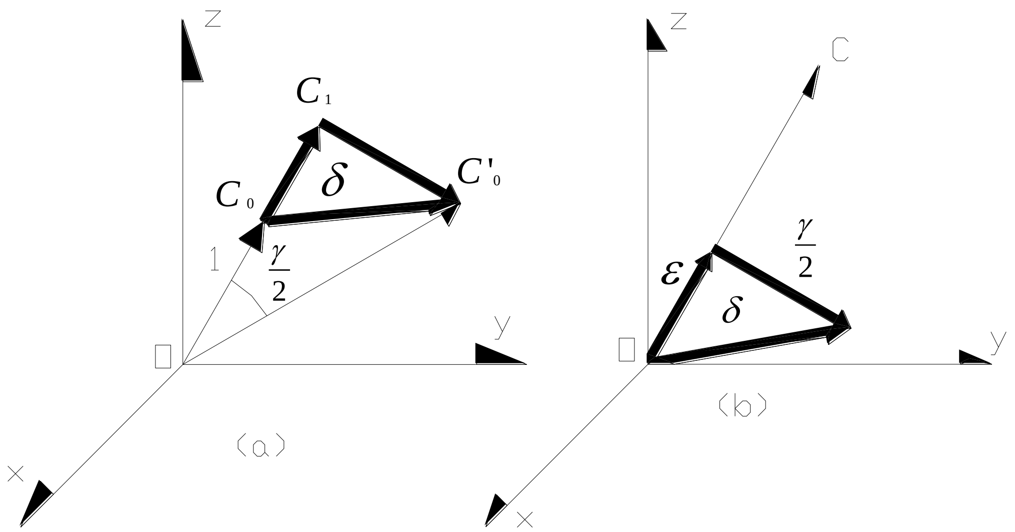
Siendo:

$$\varepsilon_C = \frac{\overline{OC'_0} - \overline{OC_0}}{\overline{OC_0}} = \frac{\overline{OC'_0} - 1}{1}$$

Obteniéndose,

$\overline{OC'_0} = 1 + \varepsilon_C$ Ecuación 43

figura n º 25



A su vez, $\overline{C_0C_1} = \overline{OC_1} - \overline{OC_0} = \overline{OC'_0}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$ Ecuación 44

pero $\cos\frac{\gamma}{2} \cong 1$

Entonces, la ecuación 44 queda:

$$\overline{C_0C_1} = \overline{OC'_0} - 1 = 1 + \varepsilon_C - 1 = \varepsilon_C \quad \text{Ecuación 45}$$

Por otra parte:

$\overline{C_1C'_0} = \overline{OC'_0}\,\text{sen}\frac{\gamma}{2}$ pero $\text{sen}\frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}$

entonces nos queda $\overline{C_1C'_0} = (1 + \varepsilon_C)\frac{\gamma}{2}$ como ε_C es despreciable comparado con 1

concluimos $\overline{C_1C'_0} = \frac{\gamma}{2}$ Ecuación 46

En consecuencia, las deformaciones longitudinal y transversal de un elemento lineal $\overline{OC}$ *coinciden con la deformación lineal* ε_C *y el ángulo de distorsión* $\frac{\gamma}{2}$ *girado por el elemento.*

Obviamente, que para cualquier elemento lineal se cumplirá:

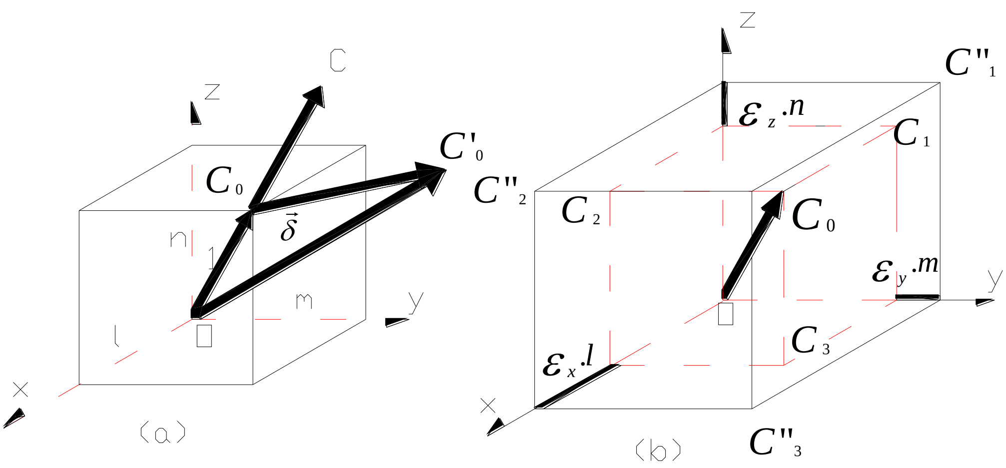
$\vec{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$ *siendo* $\vec{\delta}$, ε, γ *magnitudes adimensionales.*

*Existe una analogía entre las deformaciones y las tensiones correspondientes de un punto **O**. A cada elemento de superficie **dA** que pase por **O**, le corresponde un esfuerzo $\vec{\rho}$ de componentes $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$, así mismo, a cada punto **O** le corresponderá una deformación lineal $\vec{\delta}$ de componentes $\boldsymbol{\varepsilon}$, y $\frac{\gamma}{2}$.*

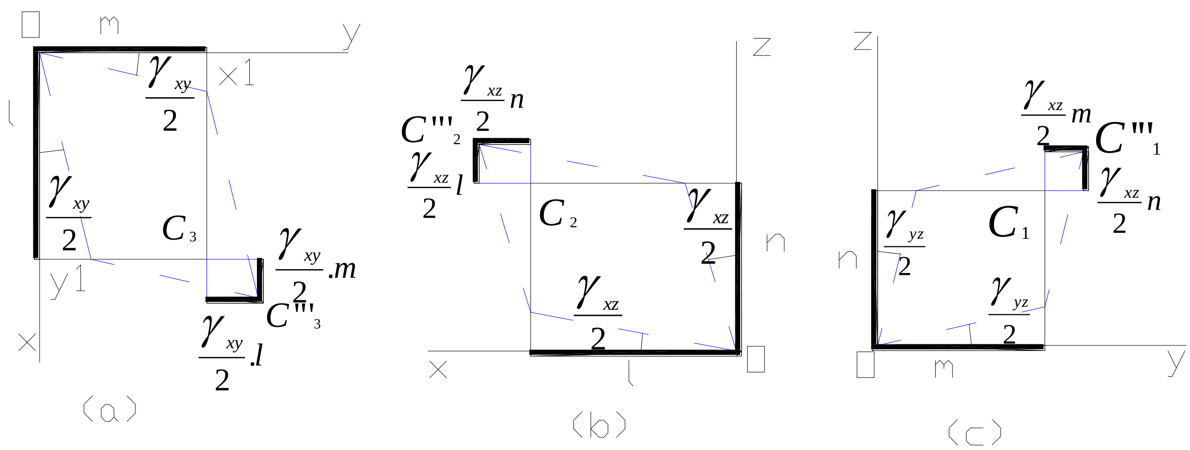
*El conjunto de las deformaciones lineales $\vec{\delta}$ correspondientes a los distintos planos que pasan por el punto **O** se denominan **estado de deformaciones del punto O**.*

<u>Tensor de deformaciones:</u> *Sea el elemento lineal $\overline{OC}$ de cosenos directores **l , m , n**, como se indica en la figura n º 26, con el elemento unitario. La deformación $\vec{\delta}$ del elemento unitario lineal $\overline{OC}$ es $\overline{C_0C'_0}$ del punto C_0.*

figura n º 26



En la figura n º 27 mostramos las componentes de la deformación de las magnitudes $\gamma_{xy};\gamma_{yz};\gamma_{zx}$.



Hacemos notar que, debido a que $\overline{OC_0} = 1$, *las aristas del cubo tienen las longitudes de los cosenos directores **l , m , n** . Para determinar las componentes transversales de los desplazamientos, tenemos, por ejemplo para el plano **xy**:*

$$tg\,\frac{\gamma_{xy}}{2} \cong \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{x_1}{m} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{\gamma_{xy}}{2} m \quad \text{y análogamente} \quad y_1 = \frac{\gamma_{xy}}{2} l$$

En consecuencia, las componentes de la deformación nos quedan:

$$\text{Ecuaciones 47} \begin{cases} \delta_x = \varepsilon_x . l + \dfrac{\gamma_{xy}}{2} m + \dfrac{\gamma_{zx}}{2} n \\ \delta_y = \dfrac{\gamma_{xy}}{2} l + \varepsilon_y . m + \dfrac{\gamma_{yz}}{2} n \\ \delta_z = \dfrac{\gamma_{zx}}{2} l + \dfrac{\gamma_{yz}}{2} n + \varepsilon_z . n \end{cases}$$

Que podemos escribir como

$$\vec{\delta} = D.\vec{u} \qquad \text{Ecuación 48}$$

En donde,

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \dfrac{\gamma_{zx}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \dfrac{\gamma_{yz}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{zx}}{2} & \dfrac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

***D** es el tensor de deformaciones, que resulta ser simétrico respecto de la diagonal principal. Y,* $\vec{u}$ *es el versor que está dirigido en la dirección* $\overline{OC}$. *Según podemos observar, existe una analogía entre las tensiones y las deformaciones de un cuerpo; mientras el tensor de tensiones tenía la forma* $\vec{\rho} = T.\vec{u}$ *, el de deformaciones es* $\vec{\delta} = D.\vec{u}$ *.*

*Si buscamos la deformación longitudinal **ε** del elemento lineal* $\overline{OC}$*, debemos proyectar* $\vec{\delta}$ *sobre el elemento lineal* $\overline{OC}$*, siendo esta:* $\varepsilon = \vec{\delta}.\vec{u}$*. Entonces:*

$$\varepsilon = \varepsilon_x.l^2 + \varepsilon_y.m^2 + \varepsilon_z.n^2 + 2.\frac{1}{2}\gamma_{xy}.l.m + 2.\frac{1}{2}\gamma_{yz}.m.n + 2.\frac{1}{2}\gamma_{zx}.n.l$$

quedando :

$$\varepsilon = \varepsilon_x.l^2 + \varepsilon_y.m^2 + \varepsilon_z.n^2 + \gamma_{xy}.l.m + \gamma_{yz}.m.n + \gamma_{zx}.n.l \quad \text{Ecuación 49}$$

Y, la deformación transversal se obtiene de:

$$\delta = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \text{de donde } \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2} \quad \text{Ecuación 50}$$

De forma similar, podemos obtener el tensor rotación R como:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

O, lo que es igual a:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

De forma tal que, $T = D + R$*, siendo T un cierto tensor*

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Correspondiente al corrimiento de un punto, cuyas expresiones son:

$$\textit{Ecuaciones } 51 \begin{cases} \mathrm{du} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \mathrm{dv} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ \mathrm{dz} = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

Deformaciones principales: *En forma análoga a la realizada en la determinación de las tensiones principales, procederemos a determinar las deformaciones principales correspondientes a los diferentes elementos lineales* $\overline{OC}$ *que pasen por un punto **O**. Para ello, llevamos en la dirección* $\overline{OC}$ *un segmento* $\overline{OQ}$ *, tal que:*

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}$$

Si los cosenos directores de $\overline{OC}$ *son: **l** , **m** , **n** , entonces se cumple que:*

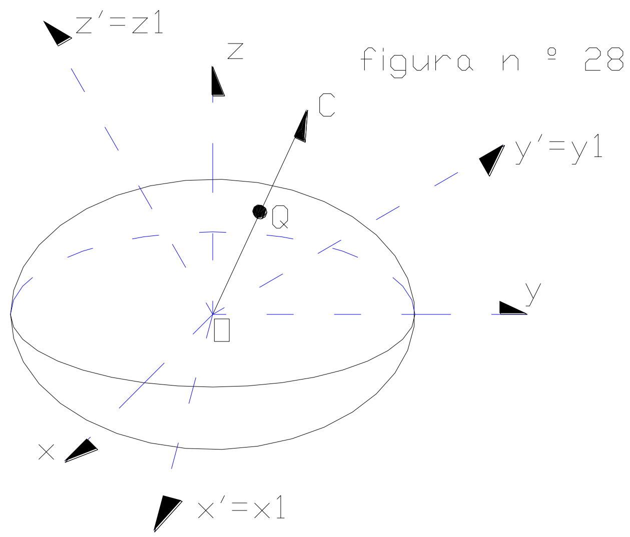
$$x = \frac{l}{\sqrt{|\varepsilon|}} \quad ; \quad \mathrm{y} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{|\varepsilon|}} \quad ; \quad \mathrm{z} = \frac{\mathrm{n}}{\sqrt{|\varepsilon|}}$$

Despejando los cosenos directores de estas últimas expresiones y reemplazando en la ecuación 49, luego simplificando ε*, resulta:*

$$\varepsilon_x.x^2 + \varepsilon_y.y^2 + \varepsilon_z.z^2 + \gamma_{xy}.x.y + \gamma_{yz}.y.z + \gamma_{zx}.z.x = 1 \quad \text{Ecuación 52}$$

Resultando, la ecuación 52, la superficie del lugar geométrico de los puntos Q.

*Esta cuádrica tiene como centro el punto **O**, y se llama cuádrica directriz de deformaciones. En la figura n º 28 se muestra esta cuádrica con la orientación de los ejes principales del estado de deformaciones, y las superficies que forman cada uno de ello se denominan planos principales. Los ejes **x' , y' , z'** son los ejes principales del estado de deformaciones. Las deformaciones correspondientes se denominan deformaciones principales, cuyas magnitudes indicamos como* $\delta_1 ; \delta_2 ; \delta_3$ *que, al ser nulas las deformaciones transversales, las deformaciones principales son iguales a las deformaciones longitudinales* $\varepsilon_1 ; \varepsilon_2 ; \varepsilon_3$.



*En otras palabras, por cada punto **O** del cuerpo existen tres ejes principales y perpendiculares entre si a los que solamente les corresponden deformaciones longitudinales.*

Por analogía con los ejes principales de tensiones, la ecuación 6, la podemos escribir de la siguiente forma para deformaciones:

$$\delta^3 - I_1.\delta^2 + I_2.\delta - I_3 = 0 \quad \text{Ecuación 53}$$

Y, los invariantes $I_1 ; \mathrm{I}_2 ; \mathrm{I}_3$*, constituyen los invariantes del estado de deformación, y estos son:*

$$\begin{cases} I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I_2 = \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 \\ I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \end{cases}$$

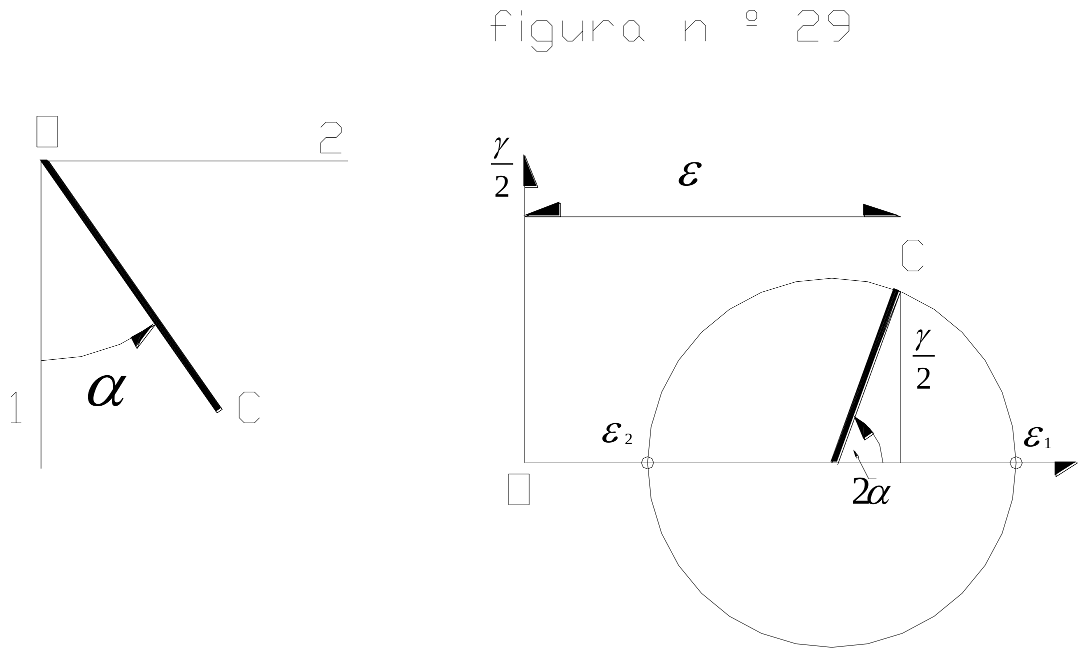
Si el invariante $I_3 = 0$*, la ecuación 53 tiene una raíz nula, y el estado de deformaciones es plano. Si* $I_2 = I_3 = 0$*, entonces, de acuerdo a la ecuación 53 el estado de deformación es simple o uniaxial.*

Por analogía con estado de tensiones, en correspondencia con las ecuaciones 19 y 21 del mismo, escribimos las ecuaciones que determinan las deformaciones ε y $\frac{\gamma}{2}$ *de un elemento lineal cualquiera* $\overline{OC}$*, estando el mismo en un plano que forma un ángulo* α *con la dirección principal 1, cuyo eje sostén es la dirección principal 3.*

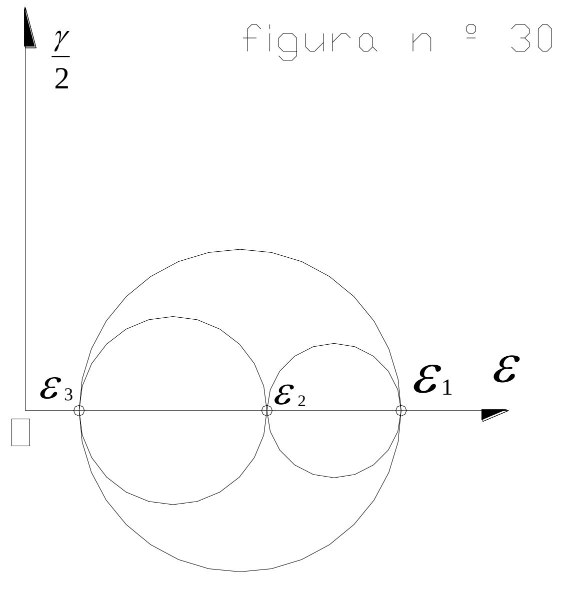
$$\varepsilon = \varepsilon_1 . \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 . sen^2 \alpha \quad \text{Ecuación 54}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} sen(2\alpha) \quad \text{Ecuación 55}$$

Esta situación se podrá representar en la circunferencia de Mohr en forma análoga como hemos representado en los estados tensionales. A modo ilustrativo, la figura n º 29 muestra la representación gráfica correspondiente a las ecuaciones 54 y 55.



Asimismo, para el caso general correspondiente a un estado triple de deformaciones tenemos la figura n º 30.



Las circunferencias de diámetros $|\varepsilon_2 - \varepsilon_3|$ y $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|$ *, representarán las deformaciones* ε y $\frac{\gamma}{2}$ *de los elementos lineales paralelos a las superficies principales **2; 3** y **1; 3** respectivamente.*

Análogamente las ecuaciones 22 y 23 de estados de tensión, para un plano cualquiera α *nos quedan transformadas para estados de deformaciones como:*

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, sen(2\alpha) \quad \text{Ecuación 56}$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} sen(2\alpha) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos(2\alpha) \quad \text{ecuación 57}$$

Que podrá ser representada en la circunferencia de Mohr en forma análoga como se ha realizado en la figura n º 12.

Variaciones de longitud, área y volumen: *Sea un cubo elemental de aristas* ***unitarias*** *correspondiente a un sólido sometido a un estado triple de tensiones. Como consecuencia del estado tensional, se producirán variaciones en las longitudes de sus aristas en sus deformaciones específicas* $\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z$.

Sea el volumen inicial del cubo elemental $V = 1$*; las longitudes finales de las aristas serán* $(1+\varepsilon_x); (1+\varepsilon_y); (1+\varepsilon_z)$*. En consecuencia, el volumen final del paralelepípedo elemental será* $V' = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$.

En cuanto a la variación de volumen, la misma estará expresada como:

$$\Delta V = V' - V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - 1$$

Y, despreciando infinitésimos de 2 º y 3 º orden por ser despreciables, resulta,

$$\Delta V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Si dividimos por el volumen V obtenemos la deformación volumétrica

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{Ecuación 58}$$

Resultando ser esta igual al invariante I_1*, pudiéndose escribir:*

$$\varepsilon_V = I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Análogamente la variación de área será $\Delta S = S - S'$*. Pero* ***S = 1****,* ***S'****, por ejemplo, si consideramos el plano xy, corresponde* $S' = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)$*. Entonces:*

$$\Delta S = 1 + \varepsilon_y + \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y - 1$$

Despreciando infinitésimos de segundo orden, nos queda: $\Delta S = \varepsilon_x + \varepsilon_y$.

De igual forma, la deformación longitudinal Δl*, si consideramos la dirección* ***x****, la longitud deformada de esta arista será* $l' = 1 + \varepsilon_x$*, y, la variación de longitud es* $\Delta l = 1 + \varepsilon_x - 1 = \varepsilon_x$.

Relaciones entre las tensiones y las deformaciones

Ley de Hooke. Constantes elásticas: *En una pieza mecánica, cuanto mayores son los esfuerzos aplicados en la misma, mayores serán las deformaciones, obviamente. La ley de Hooke establece una dependencia lineal entre las tensiones y las deformaciones. Esta dependencia será válida únicamente dentro del período de deformación elástica del material, y su expresión es:*

$$\varepsilon = \alpha . \sigma \quad \text{Ecuación 59}$$

El valor de α*, que es un coeficiente de deformación, depende de las características mecánicas del material. Conceptualmente corresponde a la deformación específica originada por una tensión unitaria.*

Es preferible utilizar $\alpha = \frac{1}{E}$ Ecuación 60

Que, reemplazado en la ecuación 59 nos queda la ecuación 61

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Ecuación 61}$$

*La constante **E** se denomina módulo de Young, o módulo de elasticidad del material, y dentro de los límites definidos para su validez, **E** es constante para un mismo material.*

Cuando se tratan de distorsiones puras, la expresión de la ley de Hooke tiene la forma:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad \text{Ecuación } 62$$

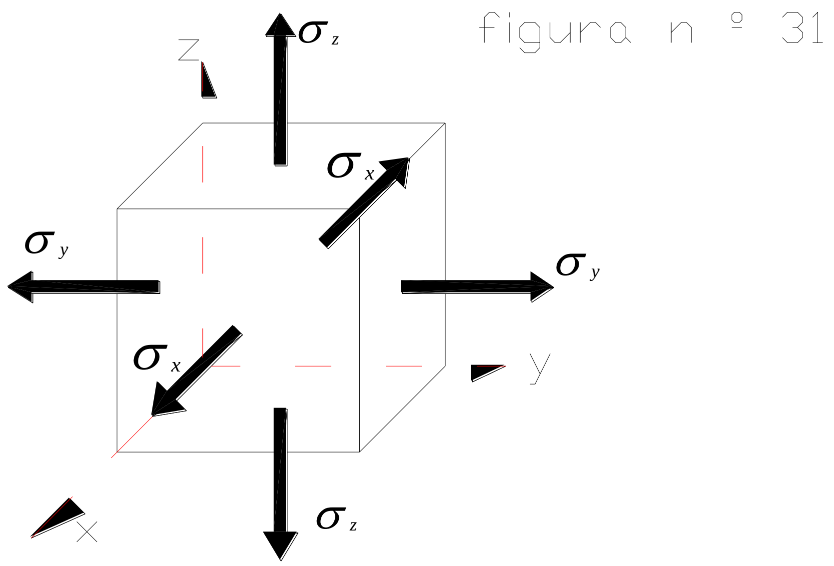
*La ecuación 62 relaciona las tensiones tangenciales con las distorsiones. En la ecuación 62, **G** se denomina módulo de elasticidad transversal, que es otra constante elástica.*

*Pero, toda deformación específica en una dirección provoca otras deformaciones de sentidos contrarios en las direcciones normales a la misma en cualquier estado de tensión. La relación entre la deformación longitudinal y la deformación transversal se la denomina coeficiente de **Poisson**, designándosela con **μ**, y esta es otra constante elástica. Esta relación la expresamos como:*

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \qquad \text{Ecuación } 63$$

La cuarta constante es el módulo de elasticidad volumétrico K cuya expresión determinaremos en otro punto.

***<u>Ley de Hooke Generalizada:</u>** Supongamos un cubo elemental de aristas unitarias sometido a las tensiones $\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z$, como indica la figura n º 31.*



El cubo se deformará con alargamientos que podrán ser positivos o negativos $\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z$. La deformación ε_x dependerá tanto de σ_x como de σ_y y σ_z considerando el coeficiente de Poisson, pudiéndose escribir:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)$$

Debido a que las deformaciones laterales son de signo contrario a las deformaciones longitudinales. De igual forma con las demás deformaciones, podemos escribir:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

En síntesis, podemos escribir el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$Ecuaciones\ 64 \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)\right] \end{cases}$$

Cuando se trata de un estado plano de tensiones y deformaciones, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$Ecuaciones\ 65 \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu.\sigma_y\right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu.\sigma_x\right] \end{cases}$$

Conociendo las deformaciones específicas $\varepsilon_x ; \varepsilon_y$ *, de las ecuaciones 65 podemos determinar las tensiones* σ_x y σ_y *, que mediante transformaciones aritméticas nos quedan las ecuaciones 66.*

$$Ecuaciones\ 66 \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu.\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu.\varepsilon_x) \end{cases}$$

Si aplicamos el mismo procedimiento con las ecuaciones 64, obtenemos las ecuaciones 67.

$$Ecuaciones\ 67 \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}\left[\varepsilon_x(1-\mu) + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}\left[\varepsilon_y(1-\mu) + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right] \\ \sigma_z = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}\left[\varepsilon_z(1-\mu) + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] \end{cases}$$

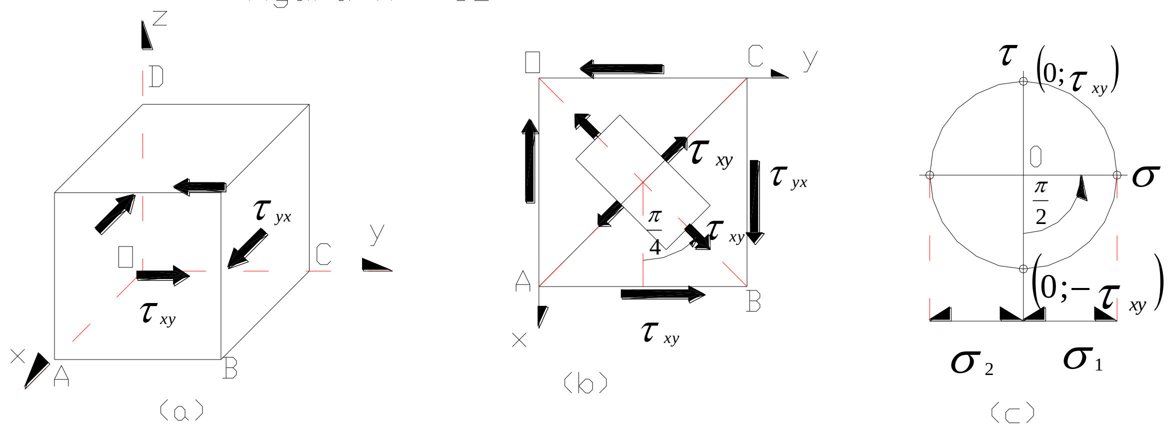
Para concluir este punto, mostramos un cuadro donde muestra los módulos de elasticidad ***E*** *de los materiales mas usuales de construcción.*

Material	$E\left(\frac{K\vec{g}}{cm^2}\right)$
Acero	$2{,}1.10^6$
Cobre	$1{,}2.10^6$
Latón	$1{,}0.10^6$
Bronce	$1{,}1.10^6$
Granito	$5{,}0.10^5$
Madera	$1{,}0.10^5$
Hormigón	$2{,}0.10^5$
Zinc	$1{,}0.10^6$
Duraluminio	$7{,}0.10^5$

Aluminio	*7,6.10⁵*
Fundición	*1,7.10⁶*
Estaño	*4,0.10⁵*

Relaciones entre E , G y μ: *Sea un cubo elemental en el cual actúen las tensiones τ_{xy} y τ_{yx} en las caras laterales del mismo como indica la figura n º 32 a. Estas tensiones tangenciales originan la distorsión γ_{xy} . Obviamente estamos hablando de un estado plano cuya representación en la circunferencia de Mohr se puede observar en la figura n º 32c.*

figura n º 32



El centro de la circunferencia de Mohr se encuentra en al origen de coordenadas, con un radio igual τ_{xy}. Las tensiones principales, de acuerdo a las ecuaciones 26 y 27 son:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{0+0}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \tau_{xy} \\ \sigma_2 = \dfrac{0+0}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = -\tau_{xy} \end{cases}$$

Los ejes principales se hallan en un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, como también podemos observar en la figura n º 32b. La deformación longitudinal ε_B del elemento $\overline{OB}$, según la ecuación 49 es:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_x.l^2 + \varepsilon_y.m^2 + \varepsilon_z.n^2 + \gamma_{xy}.l.m + \gamma_{yz}.m.n + \gamma_{zx}.n.l$$

Considerando el estado plano, en donde $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$, en consecuencia

$$l = m = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ n = 0$$

Y, además $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

Valores, que reemplazados en la ecuación 49, resulta:

$$\varepsilon_B = \gamma_{xy}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad \text{Ecuación 68}$$

De acuerdo a las ecuaciones 64

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

En este caso la ecuación 64 nos queda transformada como:

$$\varepsilon_B = \frac{\tau_{xy}}{E} - \frac{\mu}{E}(-\tau_{xy} + 0) = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\mu) \quad \text{Ecuación 69}$$

Que combinada con la ecuación 68, tenemos:

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\mu) \quad \text{Ecuación 70}$$

Y, teniendo en cuenta la ecuación 62 $\gamma = \dfrac{\tau}{G}$ *, entonces, reemplazando en la ecuación 70 nos queda:*

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\mu) \quad \text{Ecuación 71}$$

*De la ecuación 71 despejamos **G**, quedándonos:*

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{Ecuación 72}$$

*Nos cabe destacar que **E , G** y **μ** son válidas para cualquier estado de solicitaciones debido a que son constantes físicas que dependen del material.*

<u>Módulo de elasticidad volumétrico:</u> *Consideremos un cubo elemental de aristas unitarias sometido a un estado de tensiones en el cual* $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ *, denominado estado hidrostático, originándole una deformación volumétrica al cubo.*

Análogamente con la ley de Hooke, podemos escribir

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K} \quad \text{Ecuación 73}$$

*Siendo **K** el módulo de elasticidad volumétrico, que es una constante elástica que relaciona la presión hidrostática con la deformación volumétrica. Las unidades de **K** deben ser de la misma magnitud que p, y por consiguiente que **σ**, debido a que* ε_V *es adimensional.*

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ Ecuación 74,

Entonces, sumando miembro a miembro las ecuaciones 64, resultará:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{Ecuación 75}$$

Pero $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p$

Y, la ecuación 75 se transforma en:

$$\varepsilon_V = -3\frac{p}{E}(1-2\mu) \quad \text{Ecuación 76}$$

Como de acuerdo a la ecuación 73 $\varepsilon_V = -\dfrac{p}{K}$ *, en conjunto con la ecuación 76 resulta:*

$$-3\frac{p}{E}(1-2\mu) = -\frac{p}{K}$$

*Pudiéndose despejar el valor **K** de esta última expresión, resultando:*

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \qquad \text{Ecuación 77}$$

*Es evidente que el denominador de la ecuación 77 no puede ser nulo, entonces **K** no puede tener un valor ∞, pues ello implicaría que* $\varepsilon_V = 0$*, indicando esta condición que el cuerpo es de un material rígido ideal. Material que es imposible de concebir en la práctica.*

Por consiguiente se deberá cumplir la siguiente condición:

$$1-2\mu > 0$$

Con lo cual resulta $\mu < \frac{1}{2}$

*En otras palabras, el coeficiente de Poisson deberá ser menor que **0,5**.*
*En consecuencia, el valor K debe ser tal que: **0 < K < 0,5**.*

<u>PROBLEMAS DE ESTADOS DE DEFORMACIÓN</u>

<u>Problema n º 1:</u> *Las componentes de un estado de deformaciones en un determinado punto son:*

$$\varepsilon_x = 1.10^{-4};\ \varepsilon_y = -2.10^{-4};\ \varepsilon_z = 0{,}2.10^{-4};\ \gamma_{xy} = 0{,}5.10^{-4};\ \gamma_{xz} = 2{,}14.10^{-4};\ \gamma_{yz} = 1.10^{-4}$$

Determínese para una dirección definida por el vector $\vec{u}\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{5}}{3};0\right)$*:*

- *a) Las componentes de deformación y la magnitud de la misma;*
- *b) Las deformaciones longitudinal y transversal.*

Solución

a) Según las ecuaciones 47, las componentes de la deformación nos quedan:

$$\begin{cases} \delta_x = \varepsilon_x.l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}.m + \frac{1}{2}\gamma_{zx}.n \\ \delta_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}.l + \varepsilon_y.m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}.n \\ \delta_z = \frac{1}{2}\gamma_{zx}.l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}.m + \varepsilon_z.n \end{cases}$$

Reemplazando los datos, tenemos:

$$\begin{cases} \delta_x = 1.10^{-4}.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}.0{,}5.10^{-4}.\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2}.2{,}14.10^{-4}.0 = 8{,}53.10^{-5} \\ \delta_y = \frac{1}{2}.0{,}5.10^{-4}.\frac{2}{3} - 2.10^{-4}.\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{2}.1.10^{-4}.0 = -1{,}324.10^{-4} \\ \delta_z = \frac{1}{2}.2{,}14.10^{-4}.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}.1.10^{-4}.\frac{\sqrt{5}}{3} + 0{,}2.10^{-4}.0 = 1{,}086.10^{-4} \end{cases}$$

La magnitud de la deformación será:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^{\ 2} + \delta_y^{\ 2} + \delta_z^{\ 2}}$$

$$\delta = \sqrt{\left(8{,}53.10^{-5}\right)^2 + \left(-1{,}324.10^{-4}\right)^2 + \left(1{,}086.10^{-4}\right)^2} = 1{,}91.10^{-4}$$

b) deformaciones longitudinales y transversal.
Determinamos la deformación longitudinal mediante la ecuación 49

$$\varepsilon = \varepsilon_x.l^2 + \varepsilon_y.m^2 + \varepsilon_z.n^2 + \gamma_{xy}.l.m + \gamma_{xz}.l.n + \gamma_{yz}.m.n$$

$$\varepsilon = 1.10^{-4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-2.10^{-4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 0{,}2.10^{-4}.0^2 + 0{,}5.10^{-4}.\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{5}}{3} + 2{,}14.10^{-4}.\frac{2}{3}.0 +$$
$$+1.10^{-4}.\frac{\sqrt{5}}{3}.0 = -4{,}18.10^{-5}$$

Por medio de la ecuación 50, determinamos la deformación transversal. La misma es:

$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2} \quad \rightarrow \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left(1{,}91.10^{-4}\right)^2 - \left(-4{,}85.10^{-5}\right)^2} = 1{,}84.10^{-4}$$

<u>Problema n º 2:</u> *El vector desplazamiento en el entorno de un punto **O** de un cuerpo tiene las siguientes componentes:*

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y - z \\ w = x + 3y \end{cases}$$

*respecto de un sistema de ejes coordenados con origen en **O**. Determínese para un punto **A(0;-4;1)**,*

- *a) las componentes de la traslación;*
- *b) Las componentes de la rotación;*
- *c) Las deformaciones lineales;*
- *d) Las deformaciones angulares.*

Solución

a) Para determinar las componentes de la traslación, bastará reemplazar las coordenadas del punto A, quedándonos,

$$\begin{cases} u = 0 - (-4) = 4 \\ v = 2.0 + (-4) - 1 = -5 \\ w = 0 + 3.1 = 3 \end{cases} \quad \textit{las componentes de la traslación son } \boldsymbol{(4;-5;3)}$$

b) componentes de la rotación. Según las ecuaciones 42, tenemos:

$$\begin{cases} \theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \rightarrow \theta_z = \frac{1}{2}(2 - (-1)) = \frac{3}{2} \\ \theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \rightarrow \theta_y = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2} \\ \theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \rightarrow \theta_x = \frac{1}{2}(0 - (-1)) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{componentes rotación} \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

c) deformaciones lineales. De acuerdo a las ecuaciones 39,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \rightarrow \varepsilon_x = 1 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \rightarrow \varepsilon_y = 1 \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \rightarrow \varepsilon_z = 3 \end{cases} \quad \text{componentes de las deformaciones lineales } (1;1;3)$$

d) deformaciones angulares. Las ecuaciones 40 nos dan las deformaciones angulares.

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & \rightarrow \gamma_{xy} = -1 + 2 = 1 \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \rightarrow \gamma_{xz} = 0 + 1 = 1 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & \rightarrow \gamma_{yz} = 0 + (-1) = -1 \end{cases}$$

<u>Problema n º 3:</u> *El vector desplazamiento en el entorno de un punto **O** de un cuerpo, tiene las componentes :*

$$u = 2.a.y \;;\; \mathrm{v} = 4\mathrm{x} - \mathrm{b.z} \;;\; \mathrm{w} = \mathrm{c.x} - 3\mathrm{y}$$

*respecto de un sistema coordenado con origen en **O**. Las constantes a, b, y c, son parámetros a determinar. Calcular las deformaciones lineales y angulares en el entorno del punto **O** cuando la rotación sea nula.*

Solución

Las deformaciones lineales resultan:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \;;\; \varepsilon_{\mathrm{y}} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;;\; \varepsilon_{\mathrm{z}} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

De la consigna del enunciado obtenemos:

$$\theta_{\mathrm{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \text{ condición A}$$

$$\theta_{\mathrm{y}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \text{ condición B}$$

$$\theta_{\mathrm{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \text{ condición C}$$

*De las condiciones **A, B, y C**, surgen:*

$$2a - 4 = 0 \quad \rightarrow \mathrm{a} = 2$$

$$0 - \mathrm{c} = 0 \rightarrow \mathrm{c} = 0$$

$$-3 - (-\mathrm{b}) = 0 \quad \rightarrow \mathrm{b} = 3$$

Quedándonos las componentes del desplazamiento:

$$u = 4.y \;;\; \mathrm{v} = 4\mathrm{x} - 3\mathrm{z} \;;\; \mathrm{w} = -3\mathrm{y}$$

En cuanto a las deformaciones angulares, las mismas quedan:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 4 + 4 = 8$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 0 = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -3 - 3 = -6$$

<u>Problema n º 4:</u> *El tensor de deformaciones en un punto es:*

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} .10^{-4}$$

Determínese para un elemento lineal cuya dirección está dada por el vector $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

- *a) las componentes y la magnitud de la deformación;*
- *b) las deformaciones longitudinal y transversal.*

Solución

a) componentes y magnitud de la deformación.
Del tensor de deformaciones extraemos:

$$\varepsilon_x = 2.10^{-4};\ \varepsilon_y = 3.10^{-4};\ \varepsilon_z = -3.10^{-4};\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0;\ \gamma_{zy} = 4.10^{-4}$$

De acuerdo a las ecuaciones 47, las componentes de deformación quedan:

$$\begin{cases} \delta_x = \left[2.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + 0.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].10^{-4} = 1{,}41.10^{-4} \\ \delta_y = \left[0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 3.0 + 4.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].10^{-4} = -2{,}82.10^{-4} \\ \delta_z = \left[0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 4.0 + (-3).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].10^{-4} = 2{,}12.10^{-4} \end{cases}$$

la magnitud de la deformación queda,

$$\delta = \sqrt{\left(1{,}41.10^{-4}\right)^2 + \left(2{,}82.10^{-4}\right)^2 + \left(2{,}12.10^{-4}\right)^2} = 3{,}82.10^{-4}$$

b) deformaciones longitudinal y transversal. De acuerdo a la ecuación 49, la deformación longitudinal queda,

$$\varepsilon = \left[2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3.0^2 + (-3).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0.\frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 4.0.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].10^{-4}$$

$$\varepsilon = -5.10^{-5}$$

Para determinar la deformación transversal, sabemos $\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2}$ *, entonces, reemplazando valores resulta:*

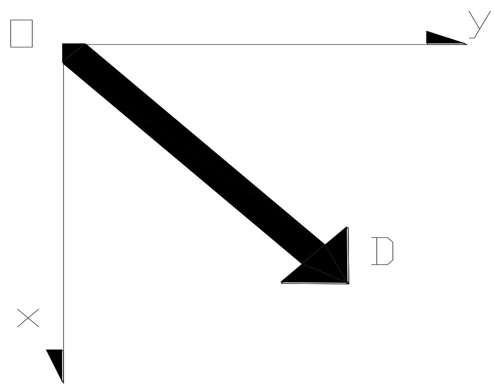
$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left(3{,}82.10^{-4}\right)^2 - \left(-5.10^{-5}\right)^2} = 3{,}76.10^{-4}$$

<u>Problema n º 5:</u> *Las componentes del estado de deformaciones de un punto están dadas en el tensor D que se indica a continuación,*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.10^{-4}$$

Determinar el ángulo girado por el elemento lineal $\overrightarrow{OD}$ *que se indica en la figura 5 dirigido según la bisectriz de* $x\hat{o}y$.

figura 5



Solución

El vector correspondiente a $\overrightarrow{OD}$ *es* $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

*sabiendo que del tensor **D** extraemos los siguientes datos*

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$; $\gamma_{xy} = 4.10^{-4}$; $\gamma_{yz} = 3.10^{-4}$; $\gamma_{zx} = 0$ *De acuerdo a las ecuaciones 47, obtenemos:*

$$\begin{cases} \delta_x = 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 4.10^{-4}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 = 2{,}82.10^{-4} \\ \delta_y = 4.10^{-4}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 3.10^{-4}.0 = 2{,}82.10^{-4} \\ \delta_z = 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 3.10^{-4}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 = 2{,}12.10^{-4} \end{cases}$$

Y al magnitud de la deformación es: $\delta = \sqrt{2.\left(2{,}82.10^{-4}\right)^2 + \left(2{,}12.10^{-4}\right)^2} = 4{,}516.10^{-4}$

Para determinar el ángulo girado por el elemento, debemos determinar primeramente, la deformación longitudinal de $\overrightarrow{OD}$ *mediante la ecuación 49.*

$$\varepsilon = 0.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0.0^2 + 4.10^{-4}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 3.10^{-4}.\frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.0.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.10^{-4}$$

De donde $\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left(4{,}516.10^{-4}\right)^2 - \left(2.10^{-4}\right)^2} = 4{,}05.10^{-4}$

<u>Problema n º 6:</u> *El estado de deformación del elemento lineal* $\overrightarrow{OQ}$ *de un cuerpo es:*

$$\varepsilon_x = 5.10^{-3}\,;\ \varepsilon_y = -4.10^{-3}\,;\ \varepsilon_z = 2.10^{-3}\,;\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Determinar en forma analítica y gráfica el estado de deformación correspondiente a un plano cuya normal exterior es $\vec{n}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución

a) En forma analítica, con la ayuda de la ecuación 49, determinamos la deformación longitudinal, pues al no existir deformaciones transversales, las tres deformaciones correspondientes al elemento lineal $\overrightarrow{OQ}$ son principales.

$$\varepsilon = \varepsilon_x . l^2 + \varepsilon_y . m^2 + \varepsilon_z . n^2$$

$$\varepsilon = \left[5.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right] .10^{-3} = 1{,}25.10^{-3}$$

En cuanto a la deformación δ,

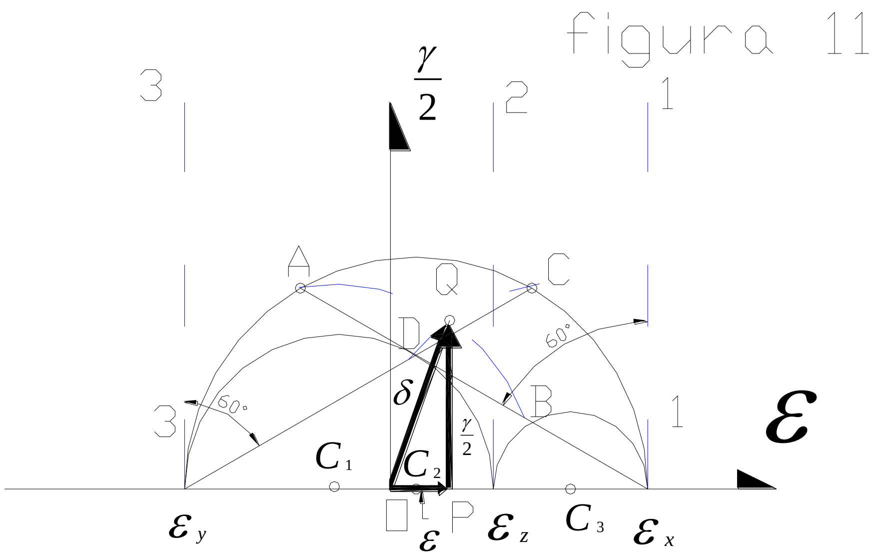
$$\delta^2 = \left(\varepsilon_x . l\right)^2 + \left(\varepsilon_y . m\right)^2 + \left(\varepsilon_z . n\right)^2$$

$$\delta^2 = \left[\left(5.\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-4.\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right] .10^{-6} = 12{,}25.10^{-6}$$

La deformación transversal resulta:

$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{12{,}25.10^{-6} - \left(1{,}25.10^{-3}\right)^2} = 3{,}27.10^{-3}$$

b) En forma gráfica, mediante la circunferencia de Mohr.



La figura 11 nos muestra la construcción de la circunferencia de Mohr. Ubicamos en el eje ε las deformaciones principales $\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z$. Luego de esto, trazamos las circunferencias con centro en

$C_1\left(\frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2};0\right)$ *y radio* $\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{2}$*;* $C_2\left(\frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2};0\right)$ *y radio* $\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}$ *; y;*

$C_3\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2};0\right)$ *y radio* $\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2}$*. Trazamos las correspondientes direcciones principales **1_1, 2_2, 3_3**. Trazamos los ángulos **α = 60°** con respecto a la dirección principal **1**, y **β = 60°** con* *respecto a la dirección principal **3**; interceptando a las circunferencias en los puntos **A, B, C** y **D** respectivamente. Seguidamente, trazamos los arcos de circunferencia* $A\overset{\frown}{Q}B$ *y* $D\overset{\frown}{Q}C$ *con centros en* C_1 y C_3 *respectivamente. Estos arcos de circunferencia se cortan en el punto Q.*

El vector $\overrightarrow{OP}$ *será representativo de la deformación lineal* $\boldsymbol{\varepsilon}$*, y el vector* $\overrightarrow{PQ}$ *será representativo de la deformación transversal* $\frac{\gamma}{2}$*. La deformación total* δ *estará representada por el vector* $\overrightarrow{OQ}$.

Problema n º 14: *Las deformaciones de un elemento plano son*
$\varepsilon_x = 0{,}007$; $\varepsilon_y = -0{,}001$; $\gamma_{xy} = 0{,}002$. *Determinar:*

- *a) las deformaciones y los ejes principales correspondientes;*
- *b) las deformaciones transversales correspondientes a las deformaciones longitudinales nulas.*

Solución

a) Para determinar las deformaciones principales, recurrimos a las ecuaciones,

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Reemplazando datos, obtenemos:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}007 - 0{,}001}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(0{,}007 + 0{,}001\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}006}{2}\right)^2} = 0{,}008$$

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}007 - 0{,}001}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(0{,}007 + 0{,}001\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}006}{2}\right)^2} = -0{,}002$$

En cuanto a la dirección principal, corresponde:

$$tg\left(2\varphi\right) = -\frac{2.\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\varepsilon_y - \varepsilon_x} = -\frac{0{,}006}{-0{,}001 - 0{,}007} \qquad \rightarrow \quad \varphi = 18{,}43°$$

b) Deformaciones transversales correspondientes a los planos de $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$*. Conociendo las deformaciones principales, de acuerdo a las ecuaciones,*

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos\left(2\alpha\right)$$

reemplazando datos, corresponde,

$$0 = \frac{0{,}008 - 0{,}002}{2} + \frac{0{,}008 + 0{,}002}{2}\cos\left(2\phi\right) \quad \text{siendo } \phi \text{ el ángulo de } \varepsilon = 0$$

resulta $\phi = 126{,}86°$

De acuerdo a la ecuación

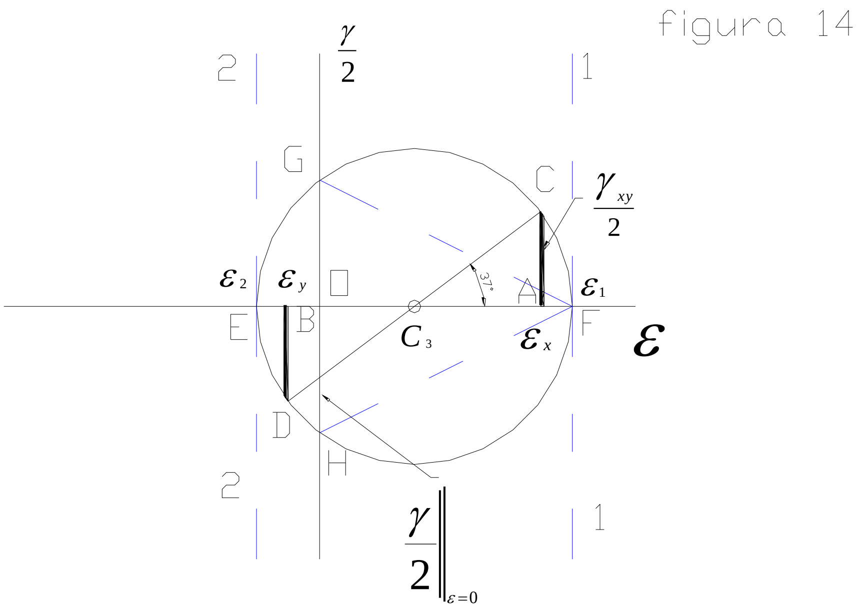
$$\frac{\gamma'}{2}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}sen(2\phi) \quad \text{reemplazando datos, tenemos}$$

$$\frac{\gamma'}{2}=\frac{0{,}008+0{,}002}{2}sen(2.126{,}86°)=-0{,}0048 \qquad \text{y} \quad \frac{\gamma'}{2}=0{,}0048$$

En forma gráfica se representa la circunferencia de Mohr en la figura 14. En la misma, marcamos sobre el eje $\boldsymbol{\varepsilon}$ *las deformaciones* ε_x y ε_y *por medio de los segmentos* $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ *respectivamente.*

Luego en el centro del segmento $\overline{AB}$ *marcamos el centro de la circunferencia de radio* $\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}$.

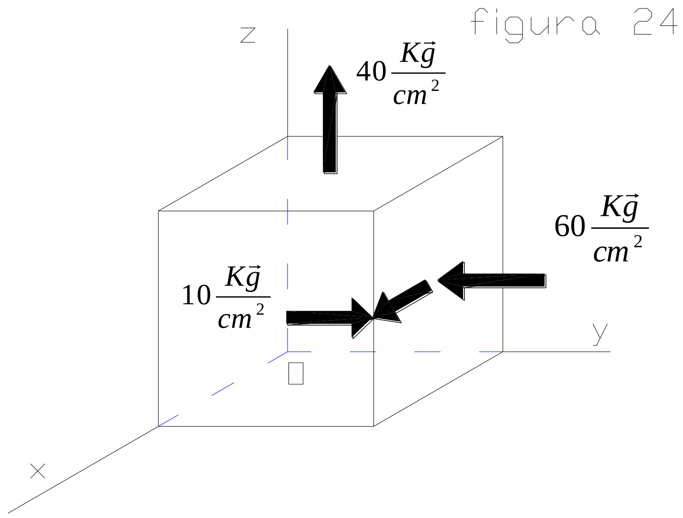
La circunferencia cortará la eje $\boldsymbol{\varepsilon}$ *en los puntos* ***E*** *y* ***F*** *correspondientes a las deformaciones principales* ε_2 y ε_1 *respectivamente. En los puntos* ***A*** *y* ***B*** *llevamos los segmentos* $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ *representativos de* $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ y $-\frac{\gamma_{xy}}{2}$ *respectivamente. El ángulo* $A\hat{C}_3C$ *es el ángulo que deberá girar el plano de* ε_x *hasta coincidir con el plano principal* ε_1*. Los ángulos* $1\hat{F}G$ y $1\hat{F}H$ *son las direcciones correspondientes a las deformaciones transversales para* $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$*. Las ordenadas* $\overline{OG}$ y $\overline{OH}$ *corresponden a las deformaciones transversales para* $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$*.*



Problema n º 15: *En el estado tensional representado en la figura 24, determinar:*

- *a) la dilatación volumétrica;*
- *b)el ángulo girado por el elemento lineal definido por el vector* $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
- *c) las deformaciones principales.*

Datos: $E=10^6\,\frac{K\vec{g}}{cm^2}$; $\mu=0{,}3$



Solución

a) *De la figura 24 extraemos:*

$$\sigma_x = 0\ ;\sigma_y = -60\frac{K\vec{g}}{cm^2};\sigma_z = 40\frac{K\vec{g}}{cm^2}\ ;\tau_{xy} = 10\frac{K\vec{g}}{cm^2};\tau_{xz} = 0;\tau_{yz} = 0$$

Siendo,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{0}{10^6} - \frac{0{,}25}{10^6}(-60+40) = 6.10^{-6} \\ \varepsilon_y = \frac{-60}{10^6} - \frac{0{,}25}{10^6}(0+40) = -7{,}2.10^{-5} \\ \varepsilon_z = \frac{40}{10^6} - \frac{0{,}25}{10^6}(0-60) = 5{,}8.10^{-5} \end{cases}$$

La deformación volumétrica nos queda:

$$\varepsilon_V = 6.10^{-6} - 7{,}2.10^{-5} + 5{,}8.10^{-5} = -8.10^{-6}$$

b) *giro que efectúa el elemento definido por el vector* $\vec{u}$. *Primeramente debemos determinar el valor de la constante **G**; luego del mismo la deformación transversal* γ_{xy}. *Siendo,*

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{10^6}{2(1+0{,}3)}\frac{K\vec{g}}{cm^2} = 384615{,}4\frac{K\vec{g}}{cm^2}$$

Y la deformación transversal es,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{10}{384615{,}4} = 2{,}6.10^{-5}$$

En cuanto a la deformación longitudinal del elemento considerado, tenemos,

$$\varepsilon_u = 6.10^{-6}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5{,}8.10^{-5}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3{,}2.10^{-5}$$

Las componentes de la deformación total son:

$$\begin{cases} \delta_x = 6.10^{-6}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4{,}24.10^{-6} \\ \delta_y = \dfrac{1}{2}.2{,}6.10^{-5}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 9{,}2.10^{-6} \\ \delta_z = 5{,}8.10^{-5}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4{,}10.10^{-5} \end{cases}$$

Entonces, el módulo de la deformación es:

$$\delta = \sqrt{\left(4{,}24.10^{-6}\right)^2 + \left(9{,}2.10^{-6}\right)^2 + \left(4{,}10.10^{-5}\right)^2} = 4{,}22.10^{-5}$$

El ángulo girado por el elemento solicitado es:

$$\frac{\gamma_u}{2} = \sqrt{\left(4{,}22.10^{-5}\right)^2 - \left(3{,}2.10^{-5}\right)^2} = 2{,}75.10^{-5}$$

c) deformaciones principales. Determinamos los invariantes del estado de deformación. Siendo estos:

$$\begin{cases} I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I_2 = \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y - \dfrac{1}{4}\gamma_{xy}^{\ 2} - \dfrac{1}{4}\gamma_{xz}^{\ 2} - \dfrac{1}{4}\gamma_{zy}^{\ 2} \\ I_3 = \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \dfrac{1}{4}\cdot\gamma_{xy}\cdot\gamma_{xz}\cdot\gamma_{yz} - \dfrac{1}{4}\cdot\varepsilon_y\cdot\gamma_{xz} - \dfrac{1}{4}\cdot\varepsilon_x\cdot\gamma_{yz} - \dfrac{1}{4}\cdot\varepsilon_z\cdot\gamma_{xy} \end{cases}$$

Reemplazando valores obtenidos de expresiones anteriores, resulta:

$$\begin{cases} I_1 = 6.10^{-6} - 7{,}2.10^{-5} + 5{,}8.10^{-5} = -8.10^{-6} \\ I_2 = -7{,}2.10^{-5}.5{,}8.10^{-5} + 5{,}8.10^{-5}.6.10^{-6} - 7{,}2.10^{-5}.6.10^{-6} - \dfrac{1}{4}.\left(2{,}6.10^{-5}\right)^2 \\ I_2 = -4{,}43.10^{-9} \\ I_3 = 6.10^{-6}.\left(-7{,}2.10^{-5}\right).5{,}8.10^{-5} - \dfrac{5{,}8.10^{-5}.\left(2{,}6.10^{-5}\right)^2}{4} = -3{,}48.10^{-14} \end{cases}$$

Reemplazados estos valores en la ecuación cúbica de deformaciones,

$$\delta^3 - I_1.\delta^2 + I_2.\delta - I_3 = 0$$

nos queda, $\delta^3 + 8.10^{-6}\delta^2 - 4{,}43.10^{-9}\delta + 3{,}48.10^{-14} = 0$

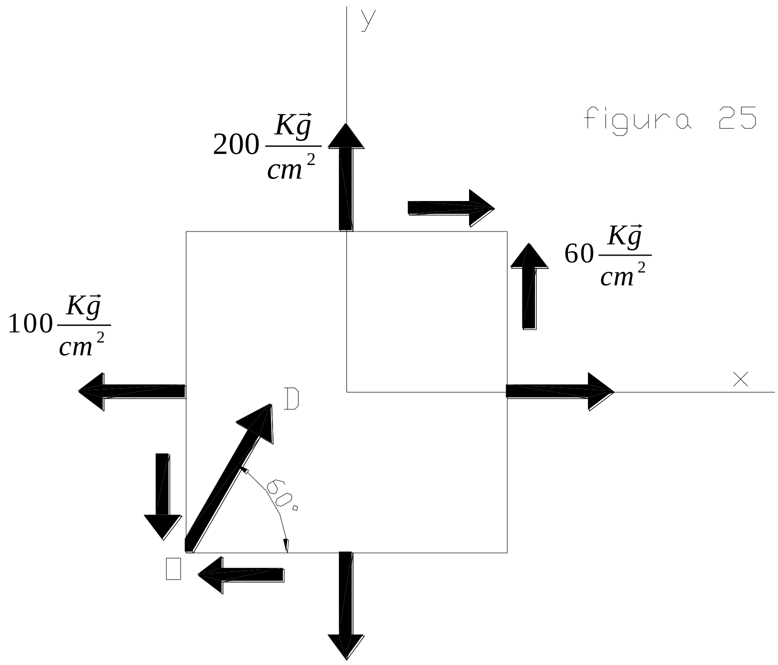
Las raíces de esta ecuación nos dan las siguientes deformaciones principales:

$$\varepsilon_1 = 5{,}802.10^{-5}$$
$$\varepsilon_2 = 8{,}09.10^{-6}$$
$$\varepsilon_3 = -7{,}411.10^{-5}$$

Problema n º 16: *Determinar para el estado tensional representado en la figura 25,*

- *a) La deformación volumétrica unitaria;*
- *b) La deformación longitudinal unitaria del elemento* $\overrightarrow{OD}$.

Datos: $E = 2.10^6 \dfrac{K\vec{g}}{cm^2}$; $\mu = 0{,}25$



Solución

a) Deformación volumétrica. De la figura 25 extraemos los siguientes datos:

$$\sigma_x = 100\frac{K\vec{g}}{cm^2}\ ;\ \sigma_y = 200\frac{K\vec{g}}{cm^2}\ ;\ \tau_{xy} = 60\frac{K\vec{g}}{cm^2}$$

*Calculamos las deformaciones según los ejes **x , y , z**.*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{100}{2.10^6} - \dfrac{0,25}{2.10^6}(200+0) = 2,5.10^{-5} \\ \varepsilon_y = \dfrac{200}{2.10^6} - \dfrac{0,25}{2.10^6}(100+0) = 8,75.10^{-5} \\ \varepsilon_z = -\dfrac{0,25}{2.10^6}(200+100) = -3,75.10^{-5} \end{cases}$$

La deformación volumétrica es,

$$\varepsilon_V = 2,5.10^{-5} + 8,75.10^{-5} - 3,75.10^{-5} = 7,5.10^{-5}$$

La deformación longitudinal del elemento $\overrightarrow{OD}$ *que forma un ángulo de* $\alpha = 60°$ *con el semieje positivo **x** es,*

$$\varepsilon_{\overrightarrow{OD}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}.\cos(2\alpha) + \frac{1}{2}.\gamma_{xy}.sen(2\alpha)$$

Que reemplazando valores nos queda,

$$\varepsilon_{\overrightarrow{OD}} = \frac{2,5.10^{-5} + 8,75.10^{-5}}{2} + \frac{2,5.10^{-5} - 8,75.10^{-5}}{2}.\cos 60° + \frac{1}{2}.\frac{60}{G}.sen\,60° = 1,05.10^{-4}$$

$$\text{y }\ G = \frac{2.10^6}{2(1+0,25)}\frac{K\vec{g}}{cm^2} = 8.10^5\frac{K\vec{g}}{cm^2}$$