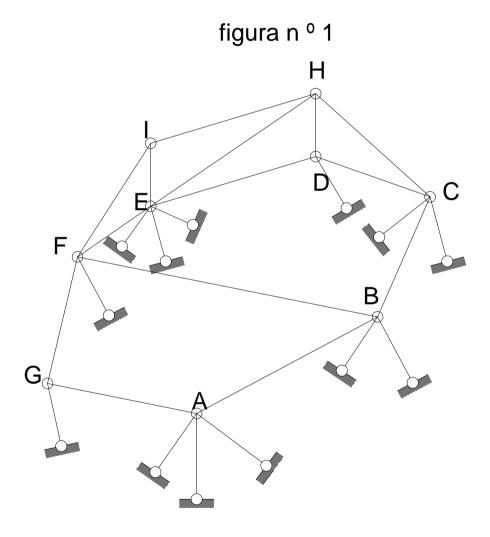
CLASE DE RETICULADOS ESPACIALES

Consideremos un punto **A** en el espacio, y que lo fijamos a tierra mediante 3 bielas no coplanares, como indica la figura n º 1, para fijar otro punto **B**, se puede recurrir a otras 3 bielas, o mediante 2 bielas articuladas a tierra, y una barra **AB** articulada al punto **A**, con la condición que la barra **AB** y las bielas no sean coplanares. ahora, la barra **AB** está inmóvil, por estar fijos los puntos **A** y **B**. De aquí concluimos que una barra rígida tiene 5 grados de libertad. Entonces, cualquier biela que se coloque en A o en B, será súper abundante e innecesaria.

Seguidamente, un tercer punto **C** ligado a **B** por una barra **BC** y 2 bielas no coplanares con **BC** estará fijo.



Fijamos otro punto E con tres bielas no coplanares. Luego, un punto intermedio D lo fijamos con una barra **ED** articulada en **E**, otra barra **CD** en **C**, y una biela no coplanar con estas articulada a tierra en **D**. De forma análoga, fijamos el punto **F**, con las barras **BF**, **EF**, más una biela no coplanar con estas en **F**.

En resumen, hemos generado un reticulado espacial partiendo de un punto fijo **A**, y vinculando los demás puntos por bielas o barras unidas a puntos fijos. Entonces, diremos que las bielas que vinculan los puntos a tierra son vínculos externos y las barras vínculos internos.

Llamando:

V: vértices

b: barras de vínculo interno

b': barras de vínculo externo

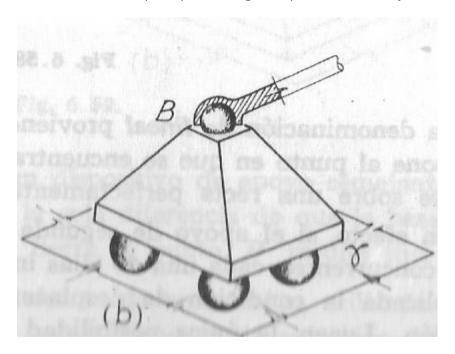
se concluye,

(1)
$$b + b' = 3V$$

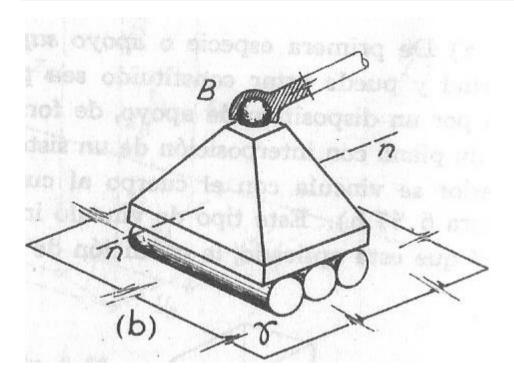
Todo reticulado isostático debe satisfacer la condición (1).

Sabemos de estabilidad 1º curso, que, Según los grados de libertad que restringe un apoyo será la especie de ese apoyo. Nos centraremos en los apoyos de 1º, 2º, y tercer especie para nuestro estudio.

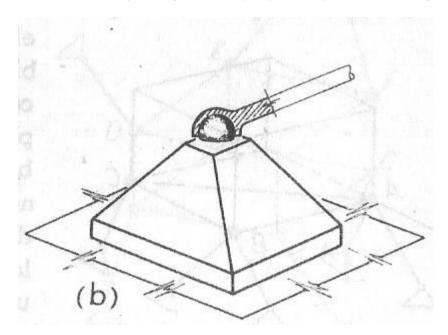
El apoyo de 1º especie o superficial, restringe solamente 1 grado de libertad, es equivalente a una biela, permitiendo desplazarse en un plano dicho apoyo, vinculando al cuerpo a una biela mediante una rótula que le permite el giro respecto de los tres ejes coordenados,



El apoyo de 2º especie, restringe dos grados de libertad, permitiendo desplazarse este apoyo en un plano según una dirección, y es equivalente a 2 bielas. Su representación es un apoyo con rodillos, uniendo la parte superior del apoyo con una biela mediante una biela permitiéndole el giro según los 3 ejes coordenados.



Apoyo de 3 º especie restringe 3 grados de libertad, es equivalente a 3 bielas no coplanares concurrentes a un punto fijo o rótula, y se puede representar de la siguiente forma:



Entonces, llamando,

(2) $A_{(1)}$: número de apoyosde 1° especie; $A_{(2)}$: número de apoyosde 2° especie; $A_{(3)}$: número de apoyosde 3° especie

Llegamos a la siguiente conclusión:

(3)
$$b' = A_{(1)} + 2 A_{(2)} + 3 A_{(3)}$$

Reemplazando esta expresión (3) en (1),

(4)
$$b + A_{(1)} + 2 A_{(2)} + 3 A_{(3)} = 3V$$

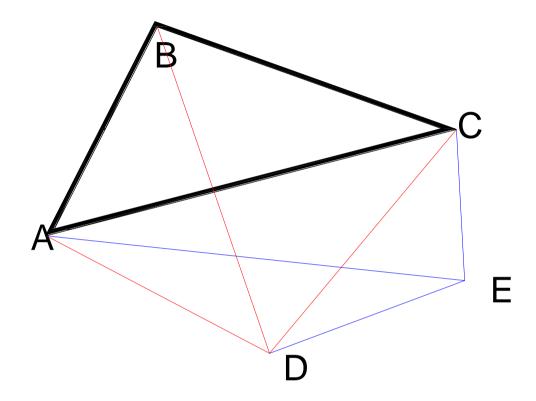
Se observa de (4) que una biela o condición de vínculo puede ser reemplazada por una barra sin dejar de cumplir la condición (1), pero no debe formar una vinculación aparente o superabundante.

Consideremos las barras rígidas **AB, AC, y BC**, formando un sistema rígido de 3 barras y 3 nodos como lo indica la figura n º 2. Un punto **D** no perteneciente al plano formado por estas 3 barras, quedará rígidamente vinculado por 3 barras (**AD, BD, y CD**). El reticulado así formado tiene 4 vértices y 6 barras y es un tetraedro indeformable o reticulado espacial base para la generación de reticulados espaciales. Cada nuevo vértice agrega 3 barras formando un reticulado rígidamente indeformable, de ningún modo vinculado a tierra, siendo su número de barras,

(5)
$$b = 3V - 6$$

Siendo **AB, AC, y BC** inmóvil, el cuerpo será inmóvil, luego, es un cuerpo rígido con 6 grados de libertad.

figura n º 2

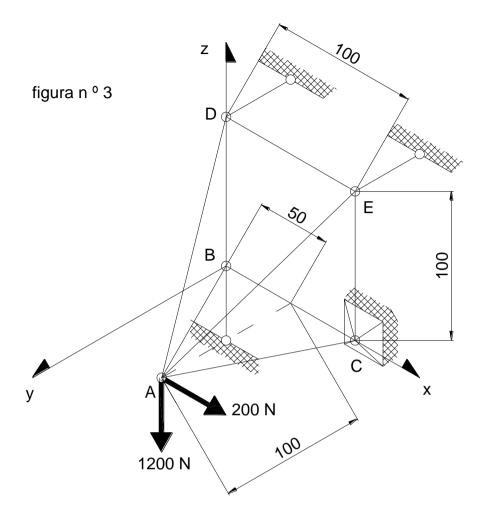


DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS

Se determinan los esfuerzos en las barras mediante el método del equilibrio de los nodos (rótulas), en forma similar a como lo realizamos en reticulados planos, por lo que no detallaremos su explicación. Por cada nodo se deben plantear 3 ecuaciones de equilibrio de sumatoria de las proyecciones de los esfuerzos según las direcciones de los ejes coordenados, donde se deben realizar los diagramas de cuerpo libre para el reticulado como en los nodos.

(6)
$$\begin{cases} \sum Proy_{xx} = 0 \\ \sum Proy_{yy} = 0 \\ \sum Proy_{zz} = 0 \end{cases}$$

A continuación, aplicamos el método del equilibrio de los nodos en el reticulado espacial de la figura n º 3. En el mismo, determinaremos tanto los esfuerzos en las barras como las reacciones de vínculo.



longitudes en cm

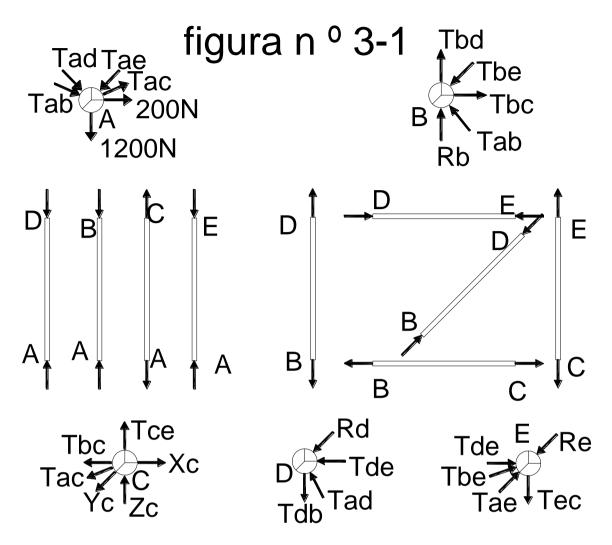
Solución

1º) Análisis cinemático,

El cuerpo está apoyado con vínculo de tercera especia en **C**, por lo cual posee un punto fijo en **C**. Los restantes apoyos están constituidos por 3 bielas vinculadas a tierra en **D**, **B**, **y E**, según se puede observar. Tanto en **D** como en **E**, las mismas son paralelas y tienen la dirección del eje **y**, con lo cual tienen intercepción impropia en esta dirección, y no son concurrentes al punto **C**, con lo cual el cuerpo no posee más de tres vínculos en un solo punto. En cuanto a la biela en **B**, ésta tiene la dirección del eje z, y se intercepta en **D** con la otra condición de vínculo, no concurriendo las bielas en **D**, **B**, **y E** a un mismo punto, concluimos que el sistema es cinemáticamente invariable, y tiene solución única.

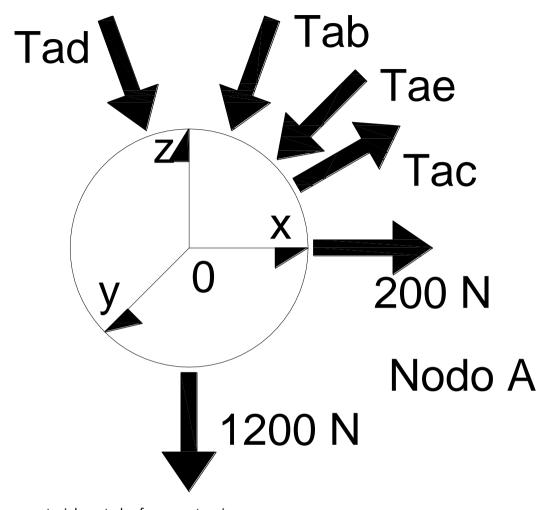
2º) Diagrama de cuerpo libre.

En la figura n º 3-1, graficamos el mismo, por separado, es decir, en las barras y en los nodos, asignándoles a los esfuerzos en las mismas sentidos arbitrarios para su análisis.



3 º) Determinación de los esfuerzos por el equilibrio de los nodos

Nodo A



Expresamos vectorialmente las fuerzas y tensiones

$$\overrightarrow{T}_{AB} = T_{AB} \left(\frac{50}{\sqrt{50^{2} + 100^{2}}} \vec{i} + \frac{100}{\sqrt{50^{2} + 100^{2}}} \vec{j} + 0\vec{k} \right) = T_{AB} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} + 0\vec{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{AC} = T_{AC} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} + 0\vec{k} \right)$$
(A1)
$$\overrightarrow{T}_{AD} = T_{AD} \left(\frac{50}{\sqrt{50^{2} + 100^{2} + 100^{2}}} \vec{i} + \frac{100}{\sqrt{50^{2} + 100^{2} + 100^{2}}} \vec{j} - \frac{100}{\sqrt{50^{2} + 100^{2} + 100^{2}}} \vec{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{AD} = T_{AD} \left(\frac{1}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} - \frac{2}{3} \vec{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{AE} = T_{AE} \left(-\frac{1}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} - \frac{2}{3} \vec{k} \right)$$

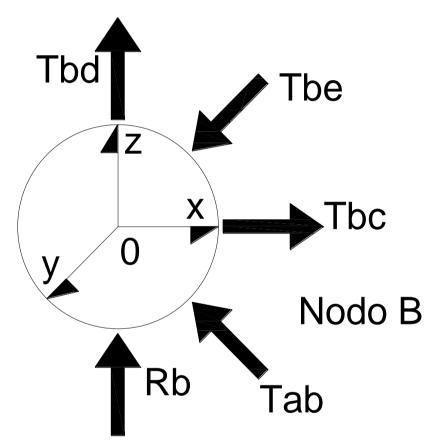
Ecuaciones de sumatoria de las proyecciones

$$\sum \Pr{oy_{xx}} = 0 \rightarrow 200 \text{ N} + \frac{1}{\sqrt{5}} T_{AB} + \frac{1}{\sqrt{5}} T_{AC} + \frac{1}{3} T_{AD} - \frac{1}{3} T_{AE} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{yy}} = 0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} T_{AB} - \frac{2}{\sqrt{5}} T_{AC} + \frac{2}{3} T_{AD} + \frac{2}{3} T_{AE} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{zz}} = 0 \rightarrow -1200 - \frac{2}{3} T_{AD} - \frac{2}{3} T_{AE} = 0$$

Nodo B



Fuerzas y tensiones expresadas vectorialmente

$$(C1) \begin{cases} \overrightarrow{R}_{B} = R_{B} \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{T}_{BD} = T_{BD} (0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k}) \end{cases}$$

$$(C1) \begin{cases} \overrightarrow{T}_{BE} = T_{BE} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{i} + 0 \overrightarrow{j} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{k} \right) \\ \overrightarrow{T}_{AB} = T_{AB} \left(-\frac{5}{\sqrt{5}} \overrightarrow{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \overrightarrow{j} + 0 \overrightarrow{k} \right) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{T}_{BC} = T_{BC} \left(1\overrightarrow{i} + 0 \overrightarrow{j} + 0 \overrightarrow{k} \right)$$

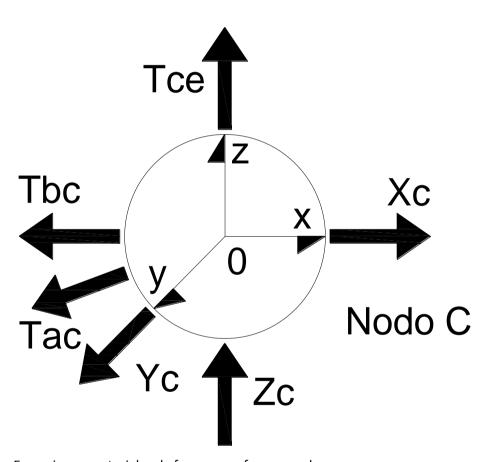
Ecuaciones de sumatoria de proyecciones en el nodo B,

$$\sum \Pr{oy_{xx}} = 0 \to -\frac{1}{\sqrt{2}} T_{BE} - \frac{5}{\sqrt{5}} T_{AB} + T_{BC} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{yy}} = 0 \to -\frac{2}{\sqrt{5}} T_{AB} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{zz}} = 0 \to -\frac{1}{\sqrt{2}} T_{BE} + T_{BD} + R_{B} = 0$$

Nodo C



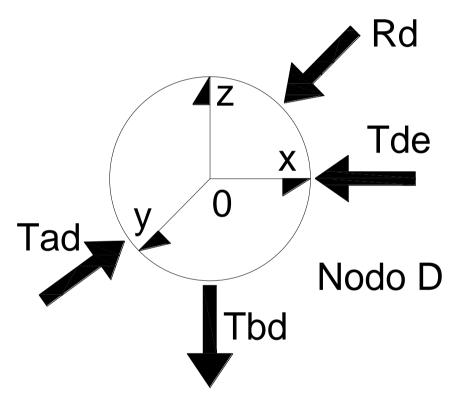
Expresiones vectoriales de fuerzas y esfuerzos en barras

$$(E1)\begin{cases} \overrightarrow{R_{C}} = X_{C} \widecheck{i} + Y_{C} \widecheck{j} + Z_{C} \widecheck{k} \\ \overrightarrow{T_{BC}} = T_{BC} \left(-1\widecheck{i} + 0\widecheck{j} + 0\widecheck{k} \right) \\ \overrightarrow{T_{CE}} = T_{CE} \left(0\widecheck{i} + 0\widecheck{j} + 1\widecheck{k} \right) \\ \overrightarrow{T_{AC}} = T_{AC} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\widecheck{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\widecheck{j} + 0\widecheck{k} \right) \end{cases}$$

Ecuaciones de equilibrio del nodo

$$(F1)\begin{cases} \sum \operatorname{Proy}_{xx} = 0 \to -\mathbf{T}_{BC} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{X}_{C} = 0 \\ \sum \operatorname{Proy}_{yy} = 0 \to \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{Y}_{C} = 0 \\ \sum \operatorname{Proy}_{zz} = 0 \to \mathbf{T}_{CE} + \mathbf{Z}_{C} = 0 \end{cases}$$

Nodo D



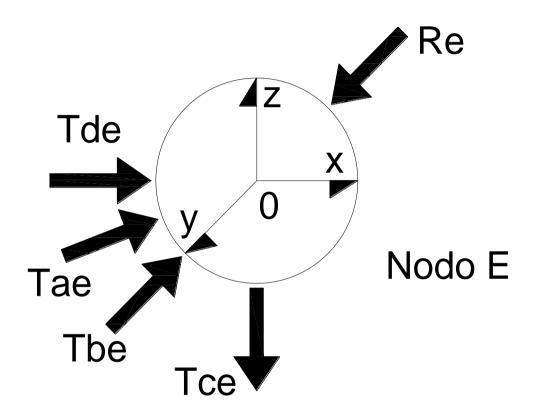
Expresiones vectoriales de fuerzas exteriores y esfuerzos

$$(G1)\begin{cases} \overrightarrow{R}_{D} = R_{D} \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{T}_{AD} = T_{AD} \left(-\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k \right) \\ \overrightarrow{T}_{BD} = T_{BD} \left(0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} - 1\overrightarrow{k} \right) \\ \overrightarrow{T}_{DE} = T_{DE} \left(-1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} \right) \end{cases}$$

Ecuaciones de equilibrio del nodo

$$(H1)\begin{cases} \sum \Pr{oy_{xx}} = 0 \to -\frac{1}{3}T_{AD} - T_{DE} = 0\\ \sum \Pr{oy_{yy}} = 0 \to -\frac{2}{3}T_{AD} + R_{D} = 0\\ \sum \Pr{oy_{zz}} = 0 \to -T_{BD} + \frac{2}{3}T_{AD} = 0 \end{cases}$$

Nodo E



Expresiones vectoriales de fuerzas exteriores y esfuerzos

$$\overrightarrow{T}_{AE} = R_{E} j$$

$$\overrightarrow{T}_{AE} = T_{AE} \left(\frac{1}{3} \widecheck{i} - \frac{2}{3} \widecheck{j} + \frac{2}{3} \widecheck{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{BE} = T_{BE} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \widecheck{i} + 0 \widecheck{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \widecheck{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{CE} = T_{CE} \left(0\widecheck{i} + 0 \widecheck{j} - 1\widecheck{k} \right)$$

$$\overrightarrow{T}_{DE} = T_{DE} \left(1\widecheck{i} + 0 \widecheck{j} + 0\widecheck{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio del nodo

$$\sum \Pr{oy_{xx}} = 0 \to T_{DE} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{BE} + \frac{1}{3} T_{AE} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{yy}} = 0 \to R_{E} - \frac{2}{3} T_{AE} = 0$$

$$\sum \Pr{oy_{zz}} = 0 \to -T_{CE} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{BE} + \frac{2}{3} T_{AE} = 0$$

Con (B1), (D1), (F1), (H1), (J1), formamos el siguiente sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}T_{AB} + \frac{1}{\sqrt{5}}T_{AC} + \frac{1}{3}T_{AD} - \frac{1}{3}T_{AE} = -200N$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}T_{AB} - \frac{2}{\sqrt{5}}T_{AC} + \frac{2}{3}T_{AD} + \frac{2}{3}T_{AE} = 0$$

$$-\frac{2}{3}T_{AD} - \frac{2}{3}T_{AE} = 1200N$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}T_{BE} - \frac{1}{\sqrt{5}}T_{AB} + T_{BC} = 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}T_{AB} = 0$$

$$T_{BD} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{BE} + R_{B} = 0$$

$$-T_{BC} - \frac{1}{\sqrt{5}}T_{AC} + X_{C} = 0$$

$$T_{CE} + Z_{C} = 0$$

$$-T_{DE} - \frac{1}{3}T_{AD} = 0$$

$$-T_{BD} + \frac{2}{3}T_{AD} = 0$$

$$T_{DE} + \frac{2}{3}T_{AD} = 0$$

$$T_{DE} + \frac{\sqrt{2}}{2}T_{BE} + \frac{1}{3}T_{AE} = 0$$

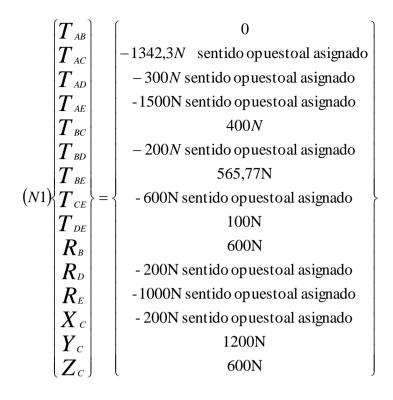
$$R_{E} - \frac{2}{3}T_{AE} = 0$$

$$-T_{CE} + \frac{\sqrt{2}}{2}T_{BE} + \frac{2}{3}T_{AE} = 0$$

Con (K1) formamos el siguiente sistema matricial de ecuaciones:

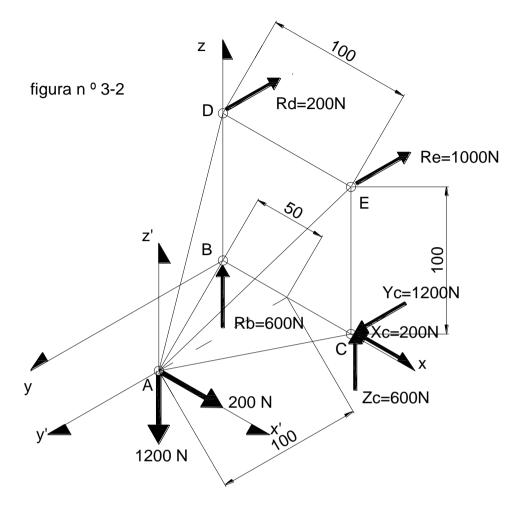
Para resolver el sistema (L1), multiplicamos ambos miembros por la matriz inversa de forma por izquierda,

Resultando de (M1),



4º) Verificamos el equilibrio del conjunto

Con los resultados obtenidos, realizamos las sumatorias de proyecciones de fuerzas respecto los ejes coordenados, y la sumatoria de los momentos respecto una terna ubicada en el **nodo A (x', y', z')** (figura n º 3-2).



longitudes en cm

Luego,

$$\sum \Pr{oy_{xx}} = 0 \rightarrow 200\text{N} - 200\text{N} = 0 \rightarrow \text{verifica}!$$

$$\sum \Pr{oy_{yy}} = 0 \rightarrow -200\text{N} - 1000\text{N} + 1200\text{N} = 0 \rightarrow \text{verifica}!!$$

$$\sum \Pr{oy_{zz}} = 0 \rightarrow 600\text{N} + 600\text{N} - 1200\text{N} = 0 \rightarrow \text{verifica}!!$$

$$\sum Mom_{xx'} = 0 \rightarrow 600\text{N} \cdot 100\text{cm} + 600\text{N} \cdot 100\text{cm} - 1000\text{N} \cdot 100\text{cm} - 200\text{N} \cdot 100\text{cm} = 0$$

$$\text{verifica}!!!$$

$$\sum Mom_{y'y'} = 0 \rightarrow 600\text{N} \cdot 50\text{cm} - 600\text{N} \cdot 50\text{cm} = 0 \quad \text{verifica}!!$$

$$\sum Mom_{z'z'} = 0 \rightarrow 1000\text{N} \cdot 50\text{cm} - 200\text{N} \cdot 50\text{cm} - 1200\text{N} \cdot 50\text{cm} + 200\text{N} \cdot 100\text{cm} = 0$$

$$\text{verifica}!!$$

Cuadro resumen de esfuerzos en barras

BARRA	TRACCIÓN (N)	COMPRESIÓN (N)
AB	0	0
AC		-1342,3
AD	300	
AE	1500	
ВС	400	
BD		-200
BE		-565,77
CE		-600N
DE		-100