

CLASE DE RETICULADOS EN EL PLANO

1

GENERACIÓN DE UN RETICULADO PLANO SIMPLE

Considerando una cadena cinemática abierta de tres chapas $S_1; S_2; S_3$ en el plano (figura n ° 1-a), sabemos que esta posee **5 grados de libertad**. Ahora bien, si giramos las chapas extremas, hasta que articulen en $A_{1;3}$, tenemos una cadena cinemática cerrada de 3 chapas (figura n ° 1-b). Como sabemos, de estabilidad I, la misma posee 3 grados de libertad, igual que una chapa. Siendo que una chapa es rígida e indeformable y posee **GL = 3**, entonces la cadena cinemática cerrada de tres chapas también será una estructura indeformable, comportándose como una unidad.

figura n ° 1-a

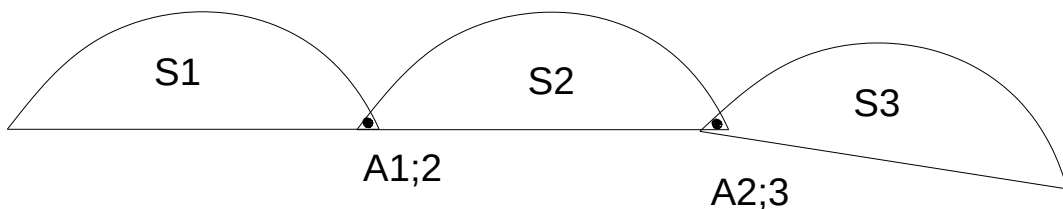
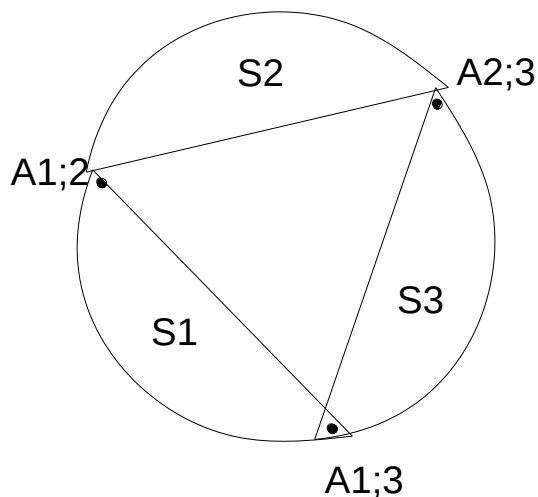
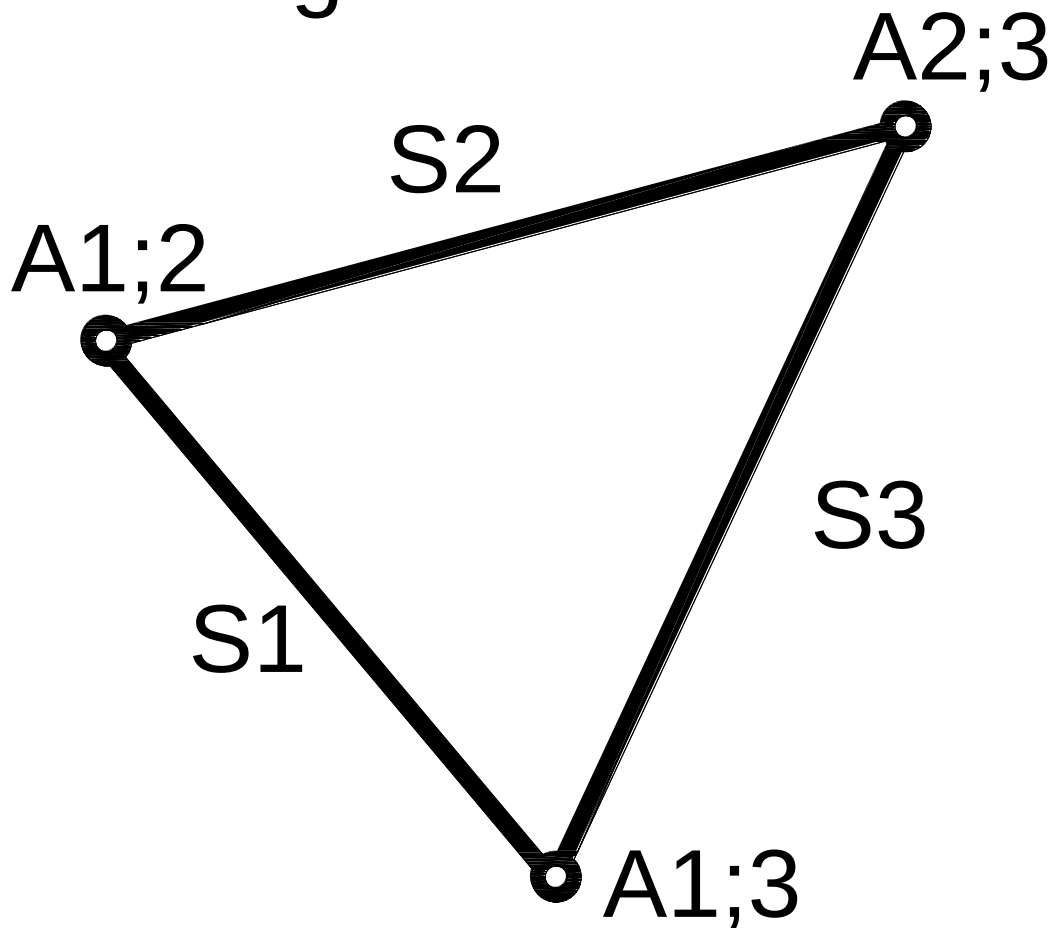


figura n ° 1-b



Podemos reemplazar las chapas por barras rectilíneas como lo indicamos en la figura n ° 2.

figura n ° 2



En consecuencia, el triángulo formado por 3 barras rígidas, es indeformable, y se considera una chapa solamente.

Si en 2 nodos cualesquiera, se articulan 2 barras, S_4 y S_5 , se obtiene otra cadena abierta de 5 grados de libertad (figura n ° 3-a). Articulando estas barras en D (figura n ° 3-b), la cadena cinemática pierde 2 grados de libertad, y el conjunto se vuelve a comportar como una chapa única.

figura n ° 3-a

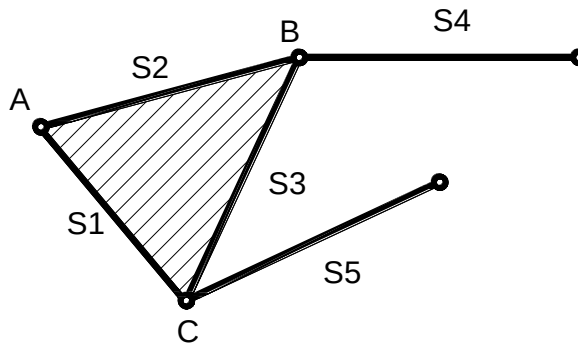
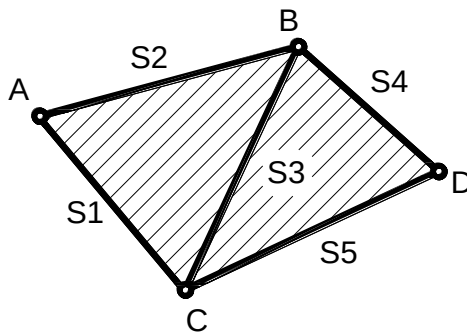


figura n ° 3-b



Si, por ejemplo, agregamos 2 barras (S_6 y S_7) en los nodos A y D respectivamente, y repetimos el procedimiento(figura n ° 4-a).

figura n ° 4-a

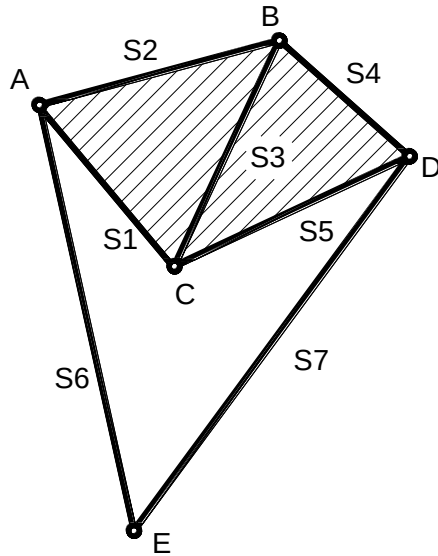
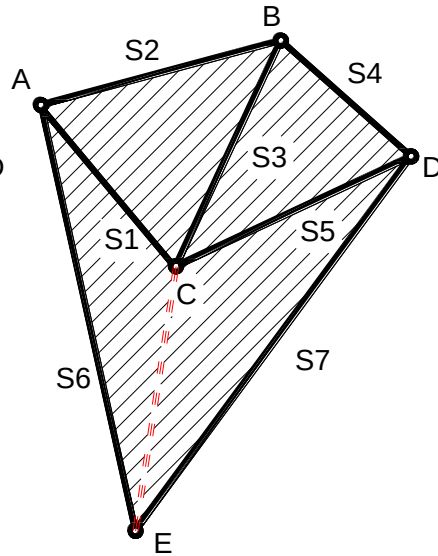
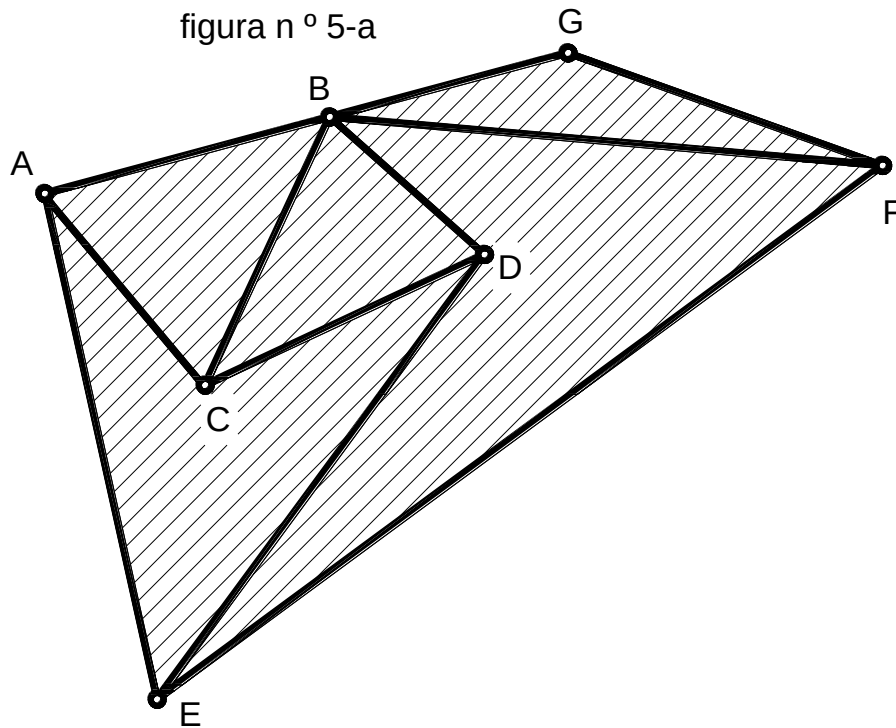


figura n ° 4-b



Agregando la barra **CE**, la misma sería superflua e innecesaria. continuando con el procedimiento, resulta la figura n ° 5-a.



Se observa que se engendró una chapa rígida e indeformable

CONDICIÓN DE RIGIDEZ DEL RETICULADO

De acuerdo a la cantidad de barras, podemos tener la siguiente cantidad de vértices:

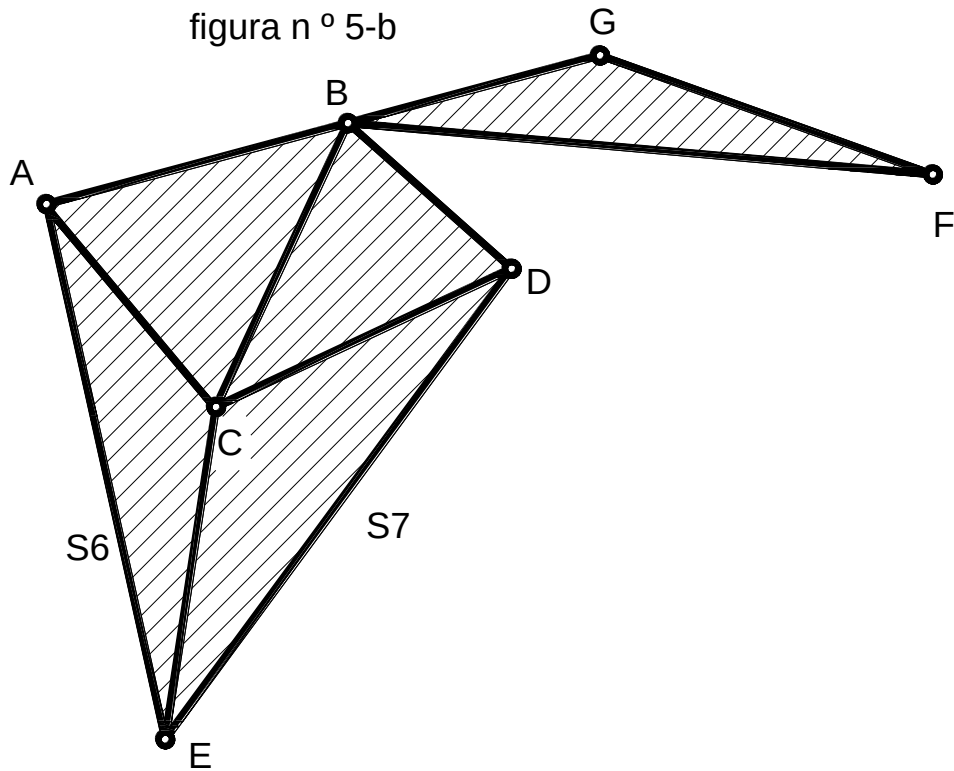
Barras	Vértices
3	3
5	4
7	5
9	6

De las observaciones en la tabla anterior, podemos concluir que una condición de rigidez es, siendo b : barras, v : vértices

$$b = 2v - 3 \quad (1)$$

La condición (1), necesaria para que el reticulado sea estrictamente indeformable, pero no puede ser suficiente para la condición de rigidez. Vamos aclarar conceptos con el siguiente ejemplo:

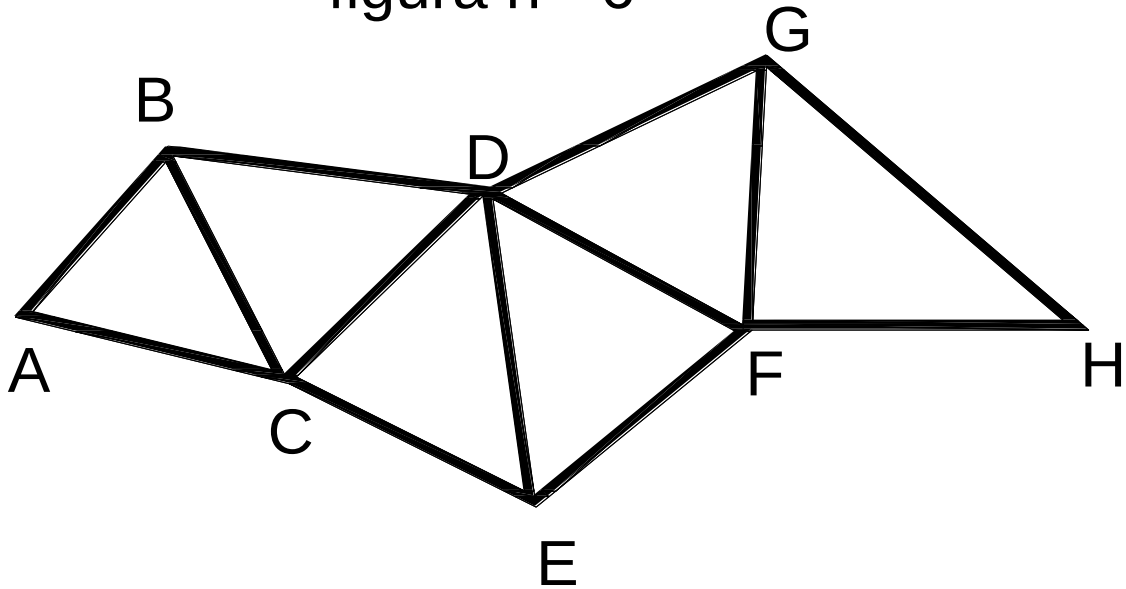
Si en el reticulado de la figura n ° 5-a se suprime la barra **EF**, y se agrega **BE**, se cumple la condición (1), pero el sistema es deformable en su conjunto, mientras que **ABDE** tiene un vínculo superfluo. Esto se debe a que se tiene una cadena cinemática abierta de dos chapas con una articulación en B (figura n ° 5-b).



RETICULADO SIMPLE

Se tiene cuando cada par de barras parten de dos vértices o nodos contiguos (figura n ° 6).

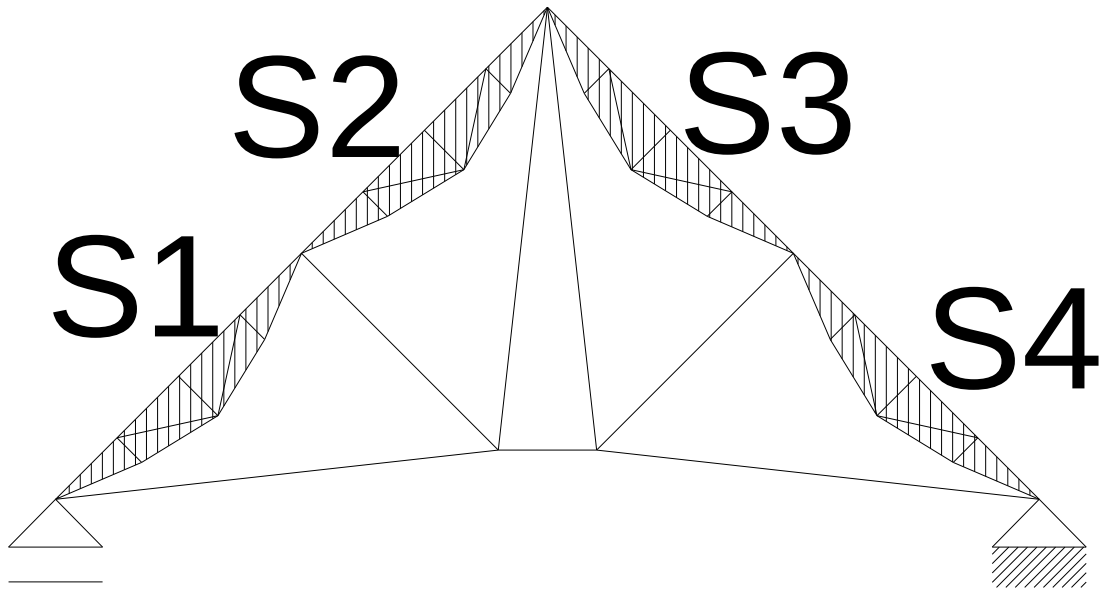
figura n ° 6



RETICULADO COMPLEJO

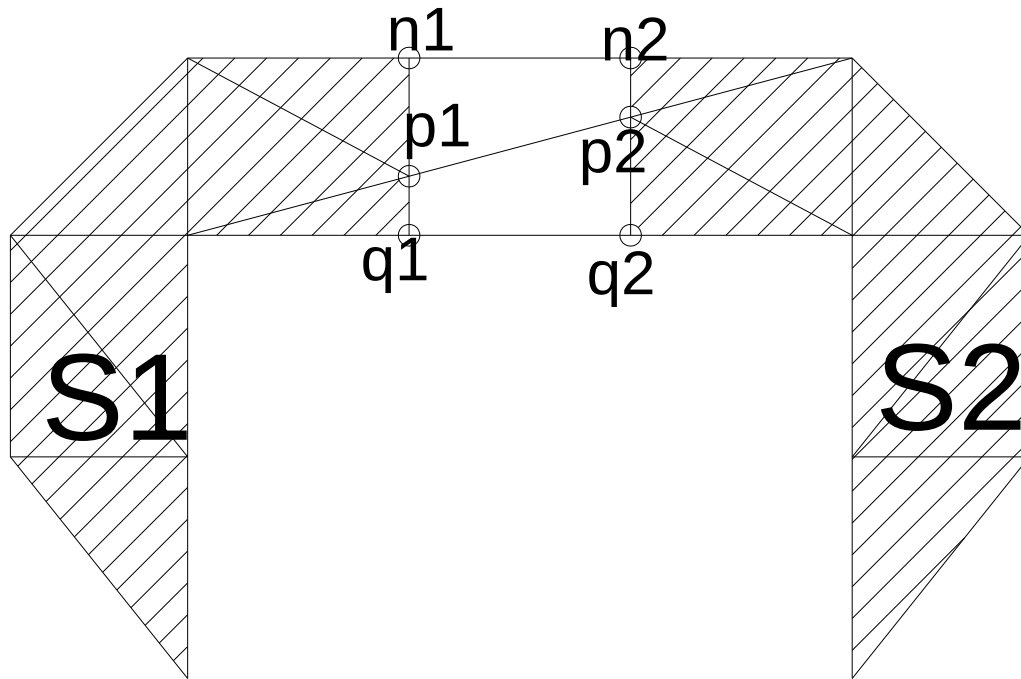
En el ejemplo de la figura n ° 7, se observa un reticulado simple unido a un reticulado mayor. Entonces, un reticulado complejo es aquel en donde 2 o más barras salen de nodos o vértices no consecutivos.

figura n ° 7



A continuación, veremos otro ejemplo de reticulado complejo, en donde dos chapas S_1 y S_2 , se hallan unidas por 3 barras no concurrentes $n_1 - n_2; p_1 - p_2; q_1 - q_2$, como lo indica la figura n ° 8.

figura n ° 8



A continuación, consideramos el caso del reticulado de la figura n ° 9-a.

figura n ° 9-a

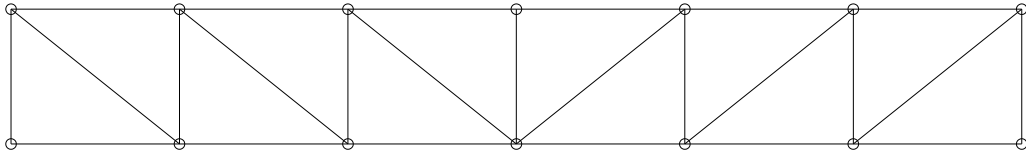


figura n ° 9-b

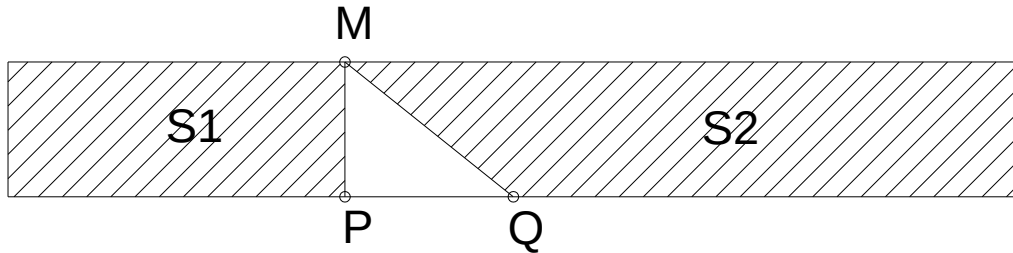
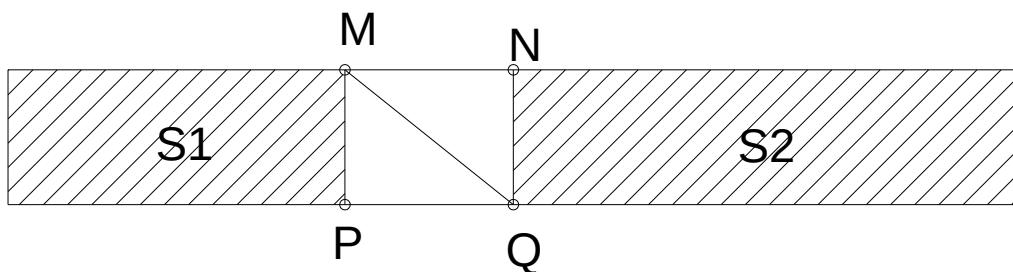


figura n ° 9-c



Luego, en la figura n ° 9-b, consideramos el reticulado de la figura 9-a, formado por dos chapas S_1 y S_2 rígidamente unidas por una articulación en M , y una barra rígida PQ , mientras que en la figura n ° 9-c, consideramos el mismo reticulado formado por las chapas S_1 y S_2 ligadas por tres barras no concurrentes MN , MQ y PQ , correspondiendo con la condición de rigidez .

CARGAS ACTUANTES EN LOS RETICULADOS.

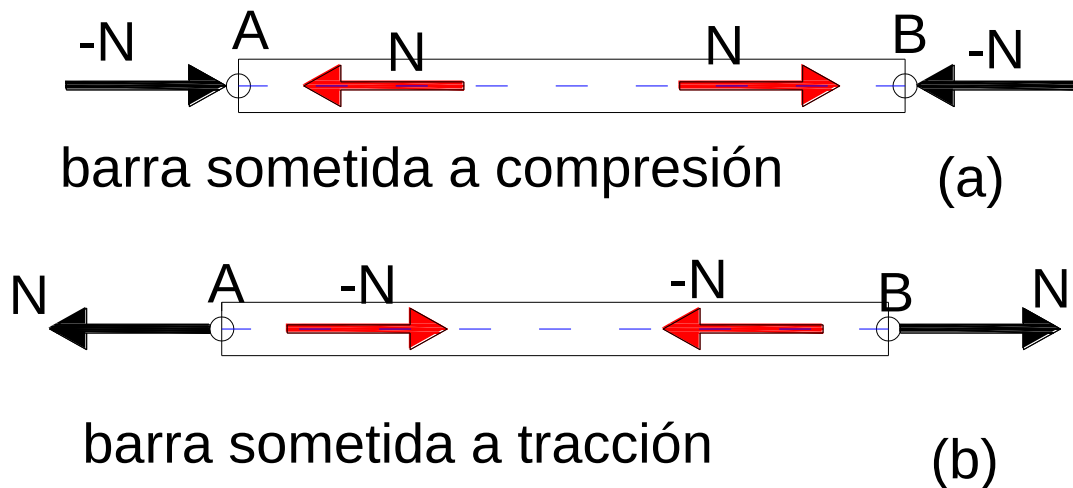
Despreciando el peso propio de las barras, que generalmente es pequeño comparado con el valor de cargas actuantes, las mismas se consideran aplicadas en los **nodos** del mismo, con lo cual, estarán solicitadas a esfuerzos axiales que lo materializarán en tensiones normales de tracción o compresión, imposibilitando tensiones de flexión y corte en las barras componentes del mismo.

Por consiguiente, se diseñan las barras del reticulado para resistir los esfuerzos axiales de tracción y compresión. Debemos destacar, que en las componentes sometidas a esfuerzos de compresión, se deberá realizar una verificación adicional al pandeo, dependiendo ello de la relación de esbeltez de la barra (relación entre la longitud de pandeo de la barra, en nuestro caso es el largo de la misma, y el menor radio de giro de la sección). Obviamente, cuanto

mayor longitud y más pequeño sea este radio de giro, mayor facilidad presentará la barra para pandear o flexión lateral.

A continuación, en la figura n º 10, graficamos los esfuerzos actuantes en las barras de reticulado, y sus reacciones internas.

figura n º 10

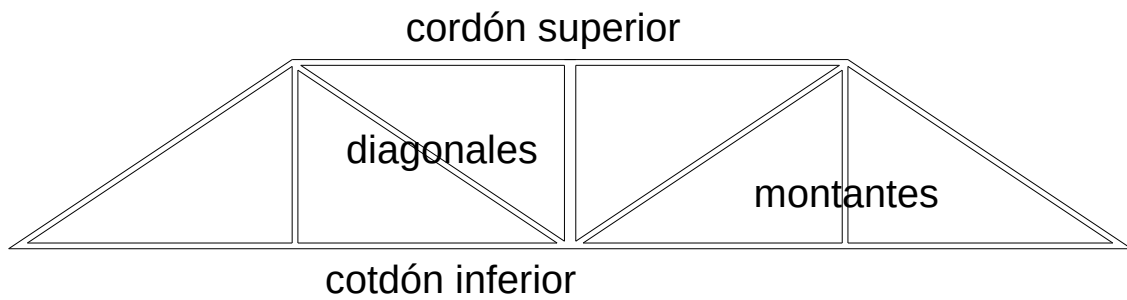


Como se observa, en la figura n º 10, cuando una barra está sometida a compresión figura n º 10 (a), la barra reacciona internamente, debido al principio de acción y reacción con fuerzas de igual intensidad, igual recta de acción y sentido opuesto, mientras que en la figura n º 10(b), la barra está sometida a tracción, y, debido a la tercera ley de Newton, las fuerzas internas tienen sentido opuesto en la barra.

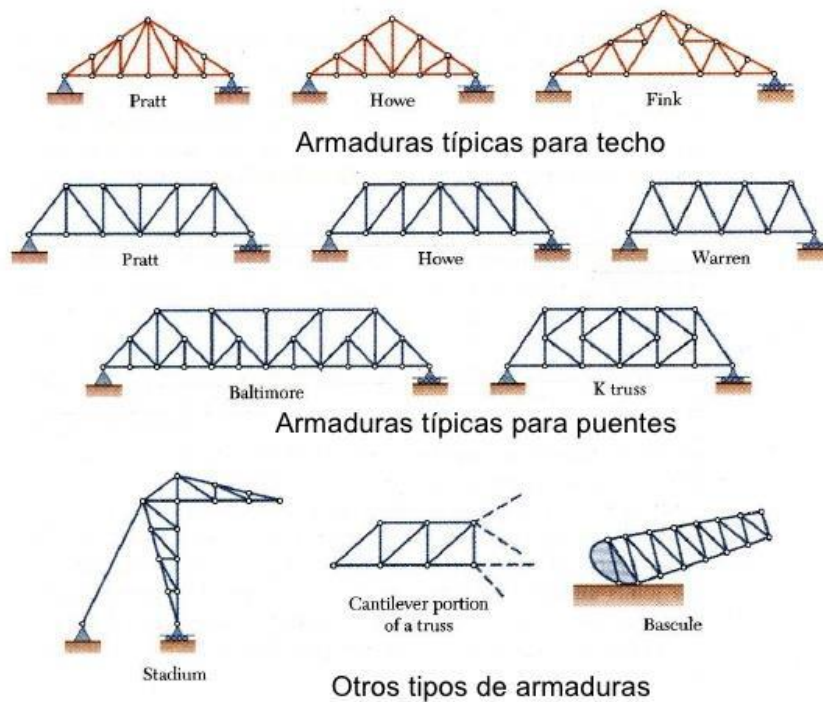
En adelante, a los esfuerzos de **tracción** les asignaremos **signo positivo (+)**, mientras que a los esfuerzos de **compresión** signo **negativo (-)**.

Previo a la determinación de los esfuerzos en las barras, mencionaremos los diferentes componentes de una armadura de reticulado, graficando en la figura n º 11.

figura n ° 11



CLASES DE RETICULADOS MÁS UTILIZADOS



DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS DE RETICULADO

Existen métodos analíticos, gráficos, y gráfico-numéricos. Los métodos numéricos son: a) equilibrio de los nodos, y, b) método de las secciones. Mientras que los métodos gráficos, está el método parcial de Método parcial de **Culmann**, y método general de **Cremona, o de las figuras recíprocas**. El método gráfico-numérico o de los momentos, es el método de **Ritter**, y es un método parcial. En el curso, enfocaremos el estudio a los métodos numéricos, que pasamos a detallar.

MÉTODO DEL EQUILIBRIO DE LOS NODOS

Consideraciones:

- * cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas, una en cada extremo;
- * Estas fuerzas tienen igual recta de acción, igual módulo, y sentidos opuestos de acuerdo a la tercera ley de Newton;
- * Se plantean tantos pares de ecuaciones de equilibrio de nodos como nodos tenga el reticulado, es decir, si la armadura tiene n nodos, existirán $2.n$ ecuaciones de equilibrio.
- * Las rectas de acción de los esfuerzos internos coinciden con la dirección de las barras;
- * Se debe graficar diagrama de cuerpo libre en los nodos.

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

Entonces, el problema se reduce a determinar los esfuerzos en las barras que componen la armadura, como las reacciones de vínculo externo. Como la armadura está en equilibrio, cada elemento en su totalidad deberá estarlo también.

Si llamamos b al número de barras, entonces, el número de pares de ecuaciones será,

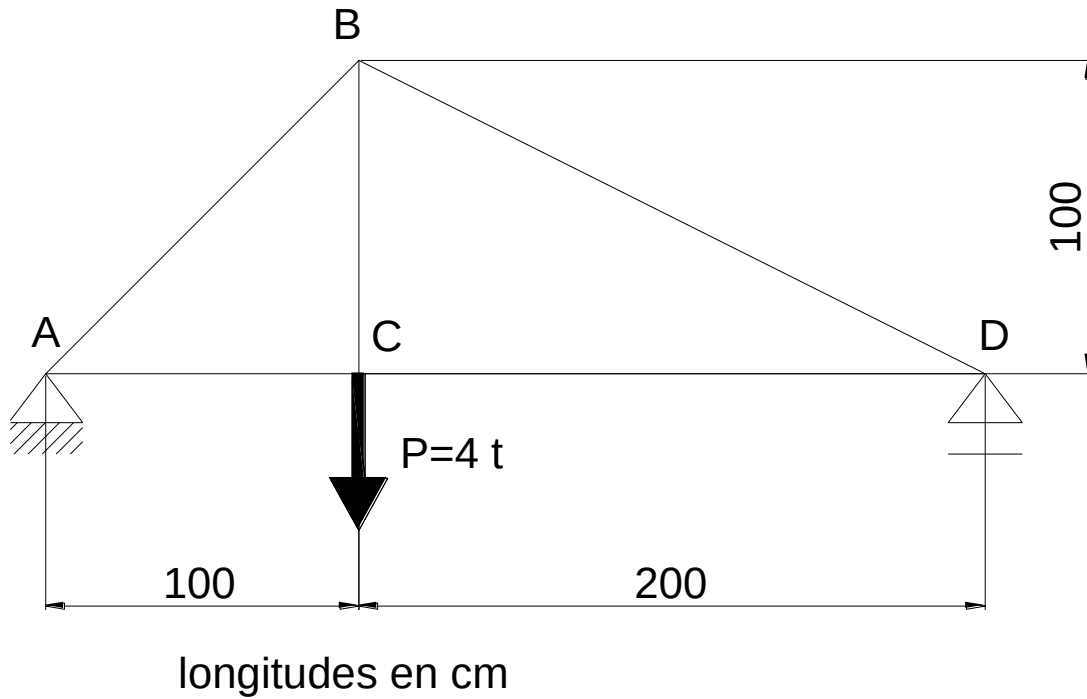
$$2n = b + 3 \quad (2)$$

En la ecuación (2), el sumando 3 refiere a las condiciones de vínculo externas. Cuando se plantean las ecuaciones de sumatoria de las proyecciones en un nodo, se le asignan sentidos arbitrarios a los esfuerzos en las barras en cada nodo, y, cuando se plantean las ecuaciones correspondientes al nodo extremo de una misma barra, se invierte el sentido asignado a la barra en el primer nodo.

Se repite el procedimiento hasta finalizar los nodos.

Ejemplo n.º 1: Determinéense los esfuerzos en las barras, y las reacciones de vínculo R_A y R_D en la estructura de la figura n.º 12.

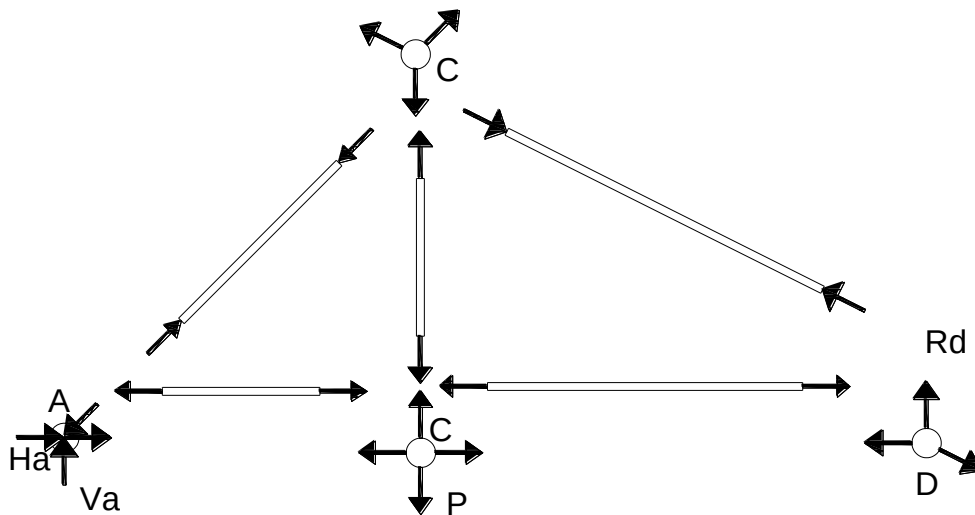
figura n ° 12



Solución

Inicialmente, graficamos el diagrama de cuerpo libre en la figura n ° 13.

figura n ° 13

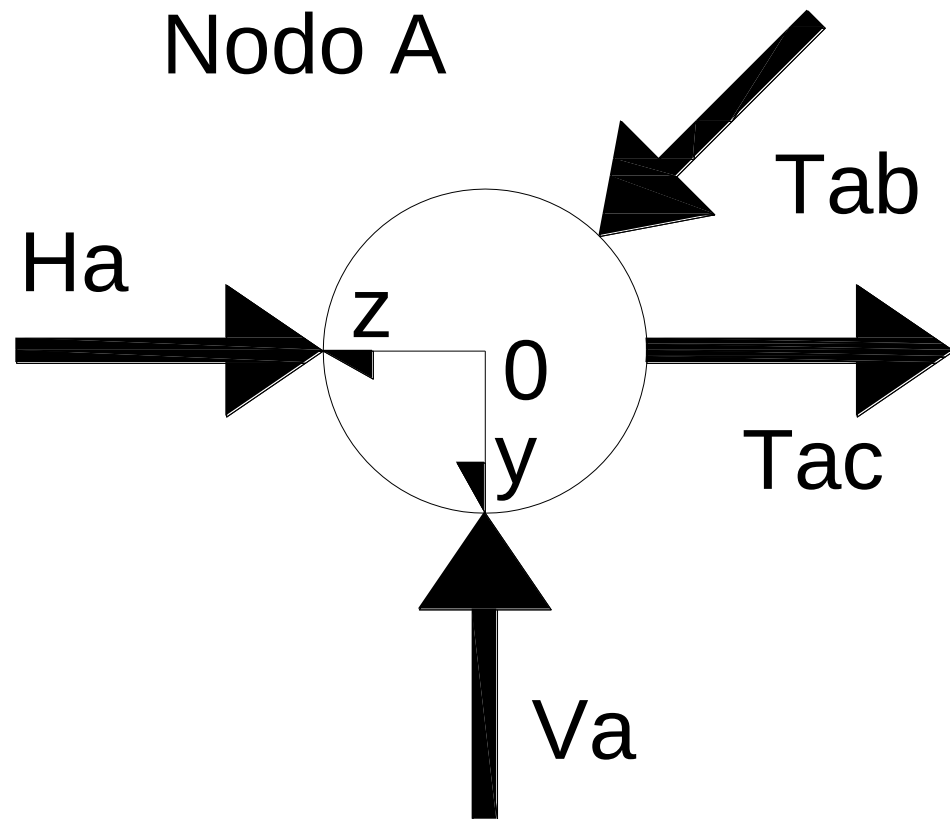


Equilibrio en los nodos

Previo al análisis del equilibrio en los nodos, determinamos las funciones trigonométricas de los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$.

$$(A1) \begin{cases} \operatorname{sen} \hat{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos \hat{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \hat{b} = \frac{100}{\sqrt{100^2 + 200^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} ; \cos \hat{b} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

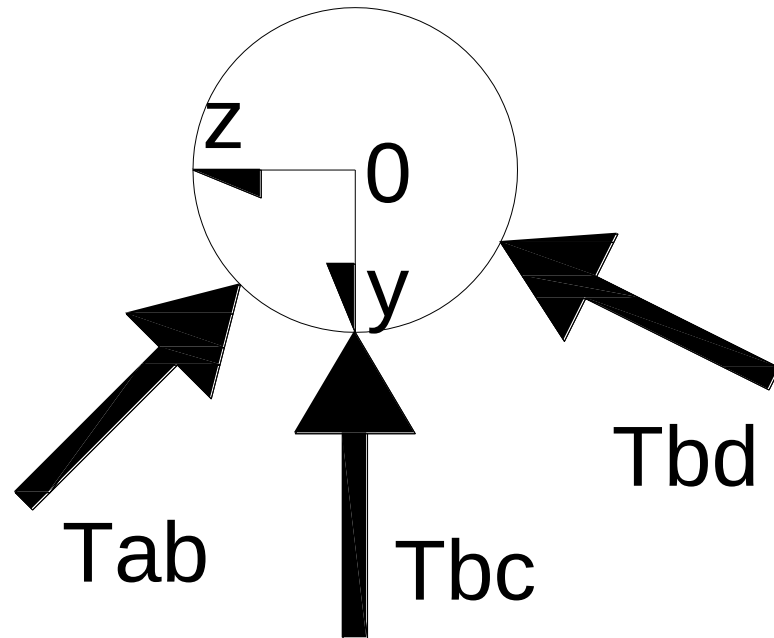
Nodo A.



$$(B1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -H_A - T_{ac} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow -V_A + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} = 0 \end{cases}$$

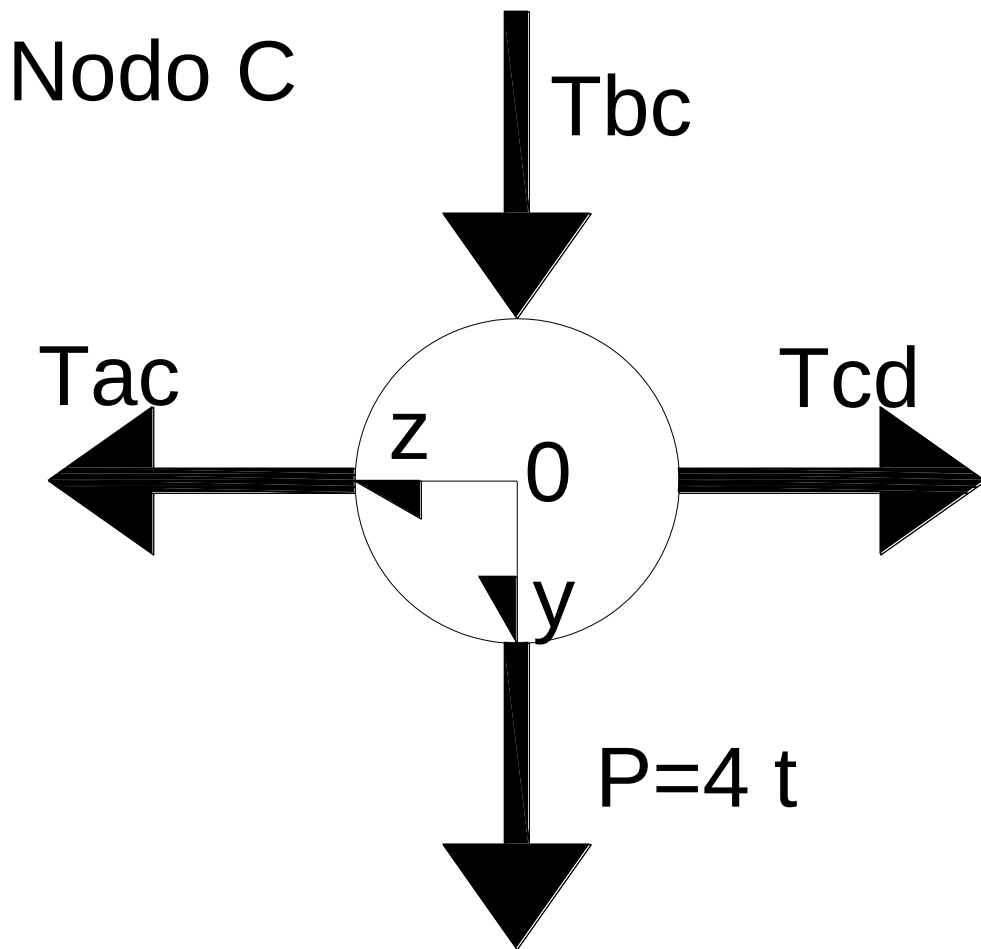
Nodo B.

Nodo B



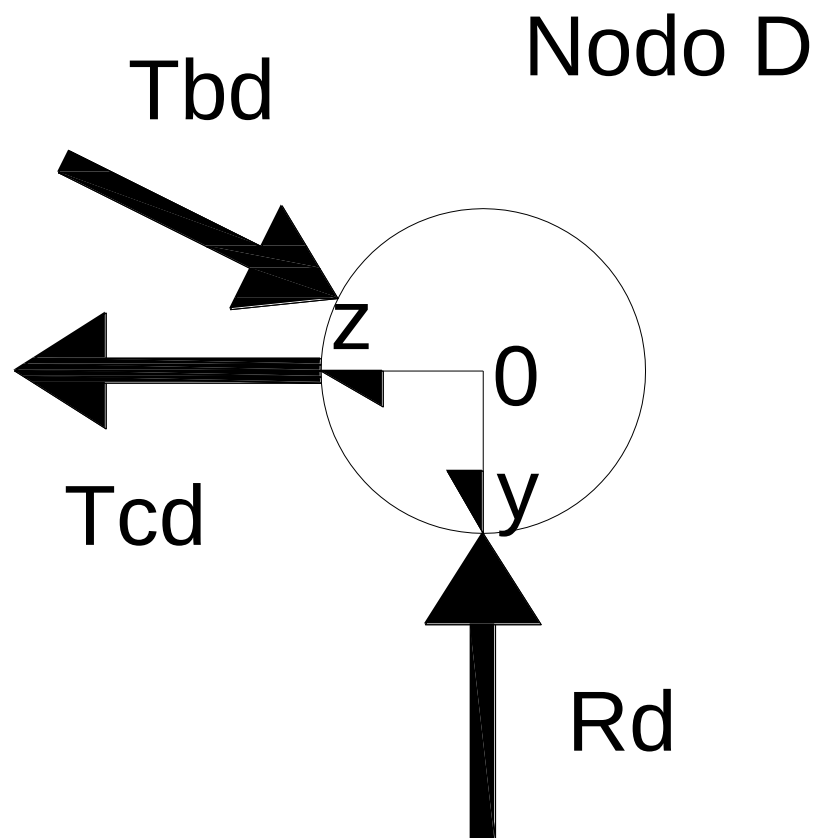
$$(C1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} + \frac{2\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow -T_{bc} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} - \frac{\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \end{cases}$$

Nodo C.



$$(D1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow T_{ac} - T_{cd} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow T_{bc} + P = 0 \rightarrow T_{bc} = -P = -4t \quad \text{sensado opuesto al asignado} \end{cases}$$

Nodo D



$$(E1) \begin{cases} \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -R_d + \frac{\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \\ \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow T_{cd} - \frac{2\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \end{cases}$$

Con las ecuaciones de (B1), (C1), (D1), y (E1), formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(F1) \left\{ \begin{array}{l} -H_A - T_{ac} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} = 0 \\ -V_A + \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} + \frac{2\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \\ -T_{bc} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_{ab} - \frac{\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \\ T_{bc} = -4t \\ T_{ac} - T_{cd} = 0 \\ -R_D + \frac{\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \\ T_{cd} - \frac{2\sqrt{5}}{5} T_{bd} = 0 \end{array} \right.$$

Con el sistema de ecuaciones **(F1)**, formamos el sistema matricial **(G1)**.

$$(G1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_A \\ T_{ac} \\ T_{ab} \\ T_{bd} \\ T_{bc} \\ V_A \\ T_{cd} \\ R_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obteniéndose de **(G1)**,

$$(H1) \begin{Bmatrix} H_A \\ T_{ac} \\ T_{ab} \\ T_{bd} \\ T_{bc} \\ V_A \\ T_{cd} \\ R_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultando de **(H1)**,

$$(I1) \begin{Bmatrix} H_A \\ T_{ac} \\ T_{ab} \\ T_{bd} \\ T_{bc} \\ V_A \\ T_{cd} \\ R_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0}{8\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{8\sqrt{10}} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{8} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{8\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \end{Bmatrix} t \cong \begin{Bmatrix} 0 \\ 2,667 \\ 3,77 \\ 2,98 \\ -4 \\ 2,667 \\ 2,667 \\ 1,333 \end{Bmatrix} t$$

Con los resultados obtenidos, resumimos el siguiente cuadro de esfuerzos:

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

BARRA	ESFUERZO TRACCIÓN (t)	ESFUERZO COMPRESIÓN (t)
AB		-3,77
AC	+ 2,667	
BC	+ 4	
CD	2,667	
BD		-2,98

23

MÉTODO DE LAS SECCIONES

Este método parcial para la determinación de esfuerzos en barras de reticulado, seccionadas por un corte que involucre 3 barras de esfuerzos desconocidos, separando el sistema en 2 secciones, para lo cual debemos constatar que en la porción elegida existan fuerzas externas actuando sobre la misma.

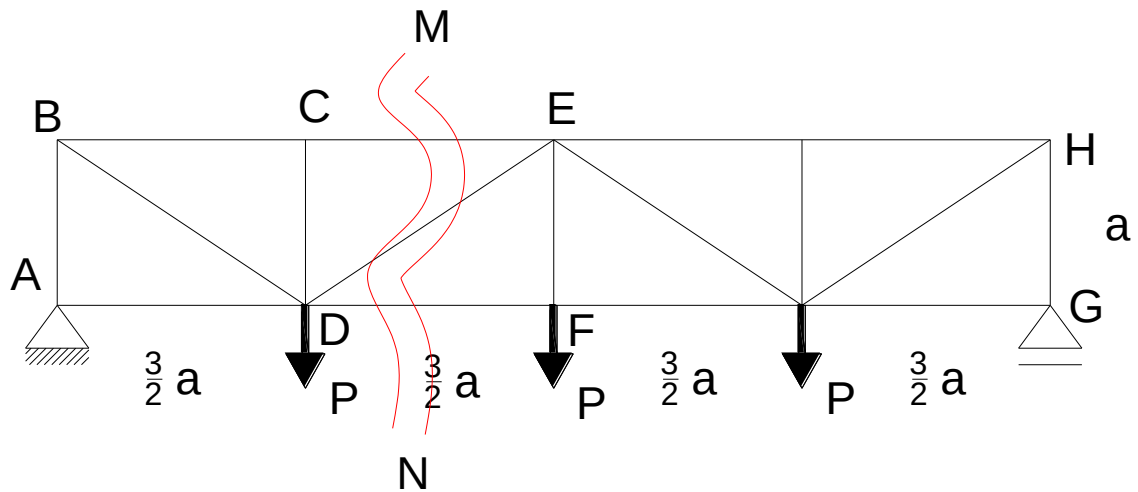
En este método parcial, a diferencia del método de los nodos que es un método general, tiene la ventaja que se pueden determinar esfuerzos en barras seccionadas por un corte, sin determinar esfuerzos en las barras que preceden las mismas, pero tiene el inconveniente que se deben determinar previamente las reacciones de vínculo externas.

Consideraciones generales

- * a) Graficar el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura**, determinando las reacciones de vínculo externas;
- * b) Cortar una sección de solamente 3 elementos de la armadura**, donde implique/n la/s barras cuyos esfuerzos se desean determinar;
- * c) Seleccionar una de las partes en que está dividido el reticulado**, y dibujar el diagrama de cuerpo libre;
- * d) Escribir las ecuaciones de equilibrio adecuadas** que resuelven el problema.

Por ejemplo, si consideramos la armadura de la figura n º 14, y queremos determinar los esfuerzos en las barras **CE, DE, y DF** afectadas por el corte **MN**.

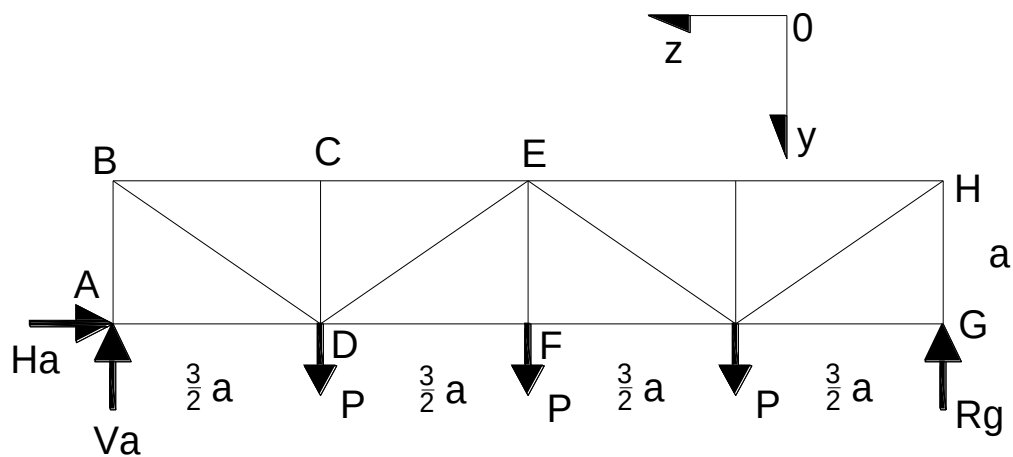
figura n ° 14



Podemos seleccionar la sección **ABCD** o **EFGH**.

A continuación, determinamos los esfuerzos de las barras **CE**, **ED**, y **DF**, para lo cual, debemos determinar las reacciones de vínculo en **A** y **G**. Par esto, realizamos un diagrama de cuerpo libre del conjunto en la figura n ° 14-a.

figura n ° 14-a



Ecuaciones de equilibrio.

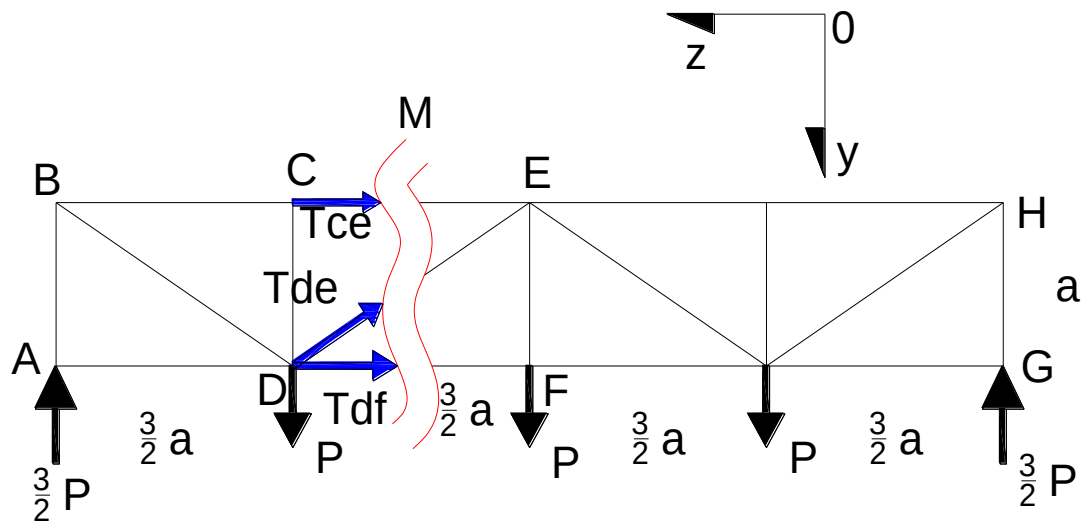
$$(A2) \begin{cases} \sum Mom^A = 0 \rightarrow -P \cdot \frac{3}{2}a - P \cdot 3a - P \cdot \frac{9}{2}a + R_g \cdot 6a = 0 \rightarrow R_g = \frac{3}{2}P \\ \sum Proj_{zz} = 0 \rightarrow -H_A = 0 \\ \sum Proj_{yy} = 0 \rightarrow 3P - V_a - \frac{3}{2}P = 0 \rightarrow V_a = \frac{3}{2}P \end{cases}$$

De igual forma., podríamos haber determinado las reacciones de vínculo V_a y R_g considerando la condición de simetría tanto de carga como geométrica, es decir,

$$(B2) \quad V_a = R_g = \frac{P + P + P}{2} = \frac{3}{2}P$$

Para la determinación de los esfuerzos, elegimos por conveniencia la sección izquierda **ABCD**, y dibujamos el diagrama de cuerpo libre en la figura n ° 14-b.

figura n ° 14-b



Los sentidos de los esfuerzos $\overline{T_{ce}}$; $\overline{T_{df}}$; y $\overline{T_{de}}$ son asignados arbitrariamente.

$$(C2) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom^D = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}P \cdot \frac{3}{2}a - T_{ce} \cdot a = 0 \rightarrow T_{ce} = -\frac{9}{4}P \text{ sentido opuesto } \leftarrow \\ \sum Mom^E = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}P \cdot 3a + P \cdot \frac{3}{2}a + T_{df} \cdot a = 0 \rightarrow T_{df} = 3P \\ \sum Proy_{yy} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}P + P - T_{de} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2}} = 0 \\ \rightarrow T_{de} = -\frac{\sqrt{13}}{4}P \text{ sentido opuesto } \downarrow \end{array} \right.$$

Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pérgola

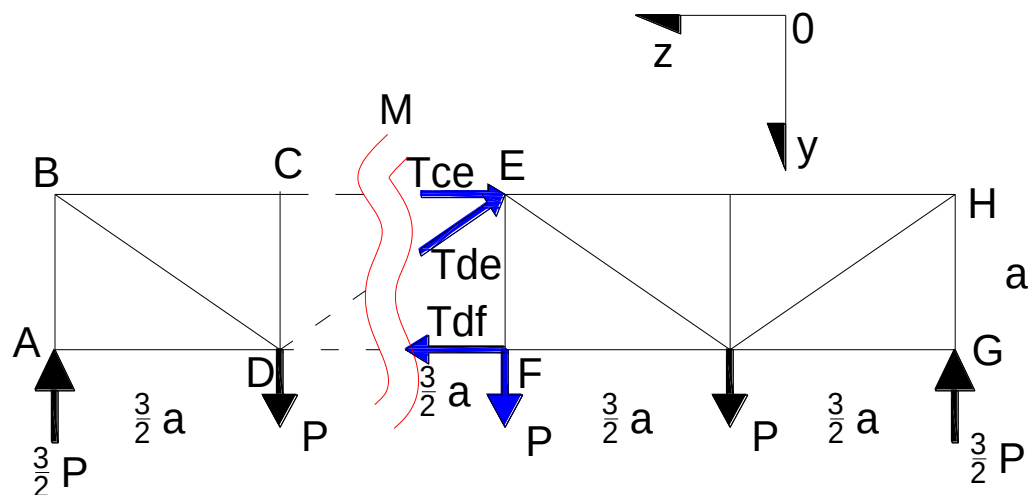
27

Cuadro resumen de esfuerzos

BARRA	ESFUERZO TRACCIÓN	ESFUERZO COMPRESIÓN
CE		$\frac{9}{4}P$
DE		$\frac{\sqrt{13}}{4}P$
DF	3P	

Verificamos el equilibrio en la sección EFGH. Mostraremos en la figura n º 14-c un diagrama de cuerpo libre correspondiente a esta sección.

figura n ° 14-c



$$\begin{aligned}
 & \sum \text{Proy}_{zz} = 0 \rightarrow -T_{ce} + T_{df} - T_{de} \cdot \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{13}a}{2}} = 0 \\
 & \rightarrow -\frac{9}{4}P + 3P - \frac{\sqrt{13}}{4}P \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{verifica} \\
 & \sum \text{Proy}_{yy} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}P + P + P - T_{de} \cdot \frac{a}{\frac{\sqrt{13}a}{2}} = 0 \\
 & \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{13}}{4}P \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{verifica} \\ & \sum \text{Mom}^F = 0 \rightarrow -T_{ce} \cdot a - T_{de} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{a}{\frac{\sqrt{13}}{2}a} - P \cdot \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}P \cdot 3a = 0 \\ & -\frac{9}{4}P - \frac{\sqrt{13}}{4}P \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{3}{2}P + \frac{9}{2}P = 0 \quad \text{verifica} \end{aligned} \right\} (D2)
 \end{aligned}$$

A continuación, proponemos una actividad para los alumnos.

Determinar los esfuerzos en todas las barras por el método del equilibrio en los nodos, y luego en las barras afectadas por los cortes **MN**, y **PQ** por el método de las secciones en las armaduras de las figuras n ° 15-a, y 15-b.

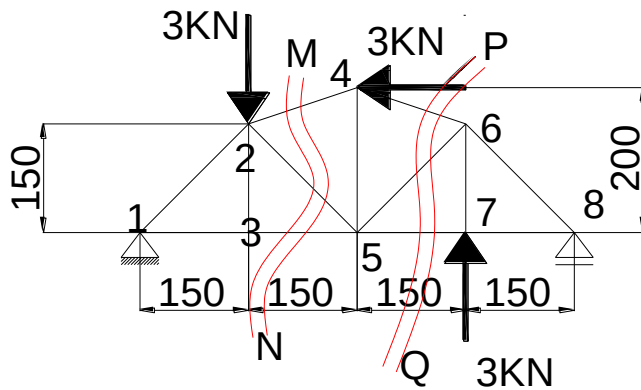


figura n ° 15-a

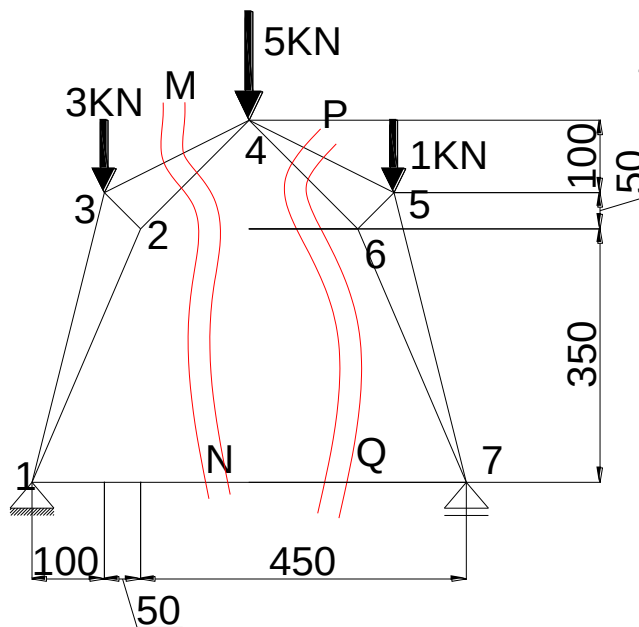


figura n ° 15-b

