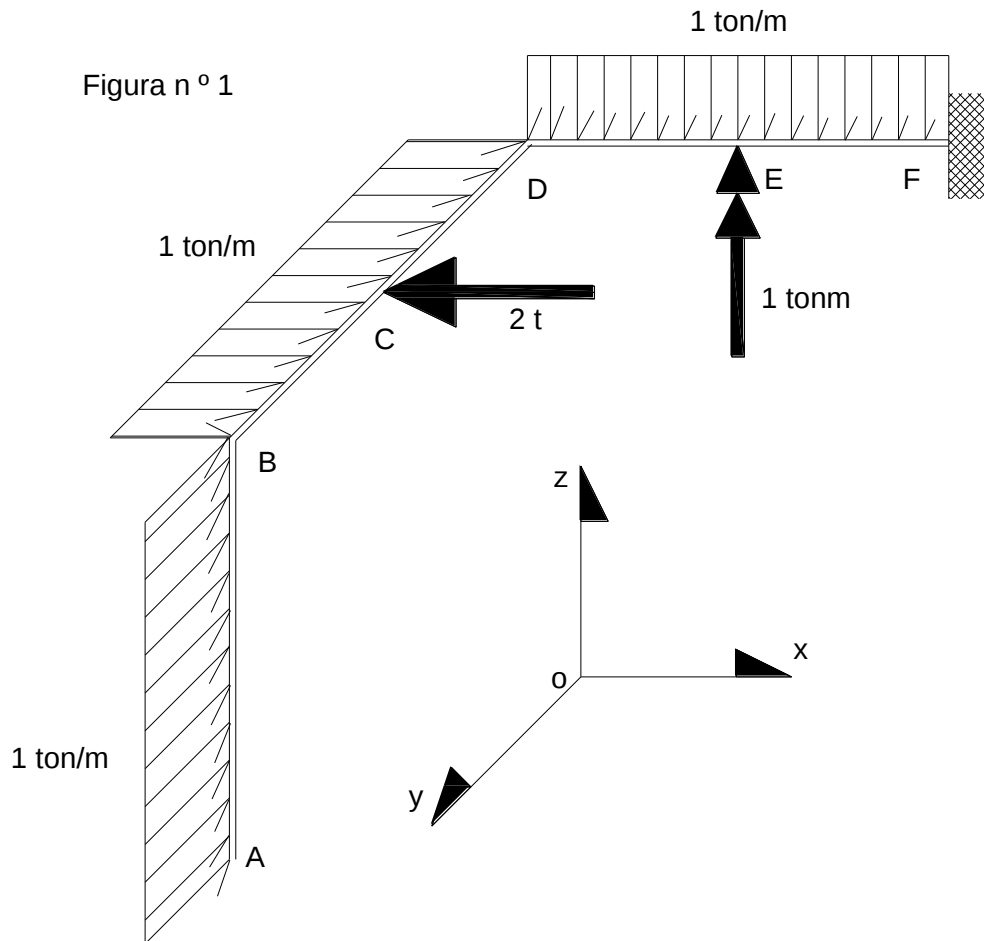


SISTEMAS ESTRUCTURALES EN EL ESPACIO

1

PROBLEMA N ° 1: DETERMINAR LAS REACCIONES DE VÍNCULO, Y CONSTRUIR LOS DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTE A LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA N ° 1.



datos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = 1m$$

Resolución

1 °) Análisis cinemático

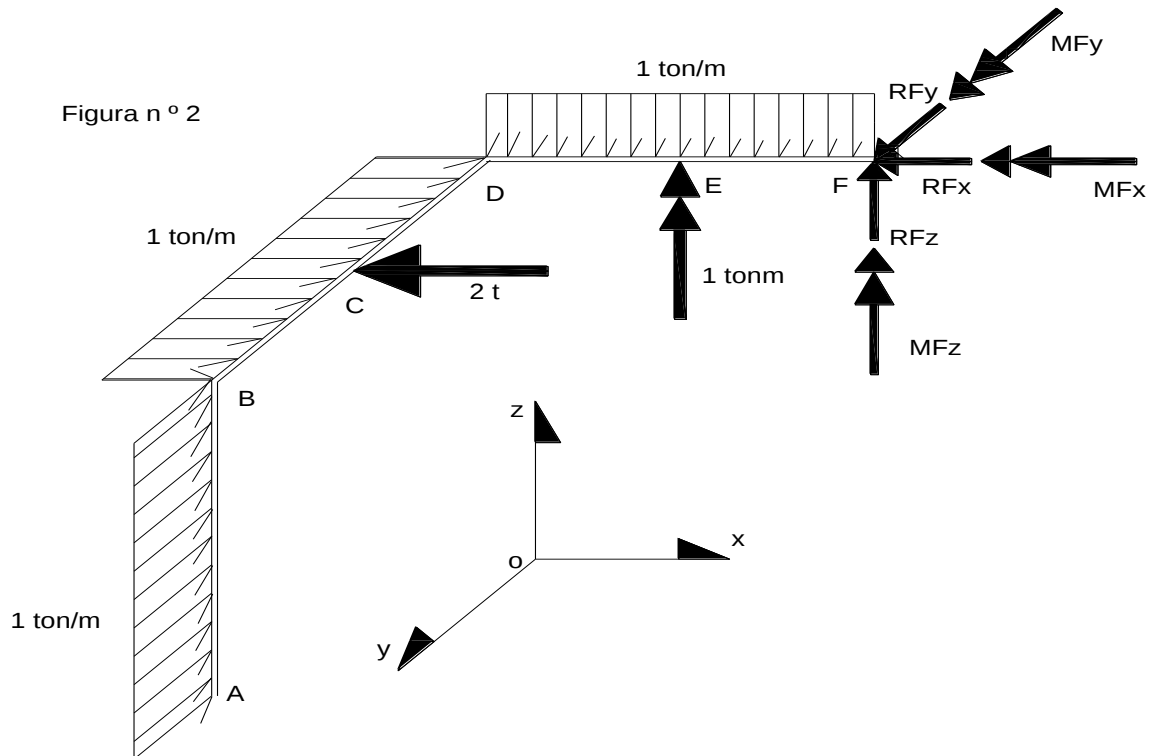
Por tratarse de una pieza espacial, la misma posee 6 grados de libertad. Al estar vinculada la misma a un empotramiento espacial, no existirá posibilidad de desplazamiento alguno en ninguno de sus puntos, por consiguiente, concluimos este punto afirmando que el sistema es "cinemáticamente invariable".

2 °) Diagrama de sólido libre

UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA

En el mismo, colocamos en evidencia las reacciones de vínculo del empotramiento, reemplazando el mismo por las fuerzas y momentos incógnitos correspondientes, asignándoles las direcciones de los ejes coordenados, y sentidos arbitrarios. En la siguiente figura n ° 2, mostramos esta situación,

2



3 º) Estudio del equilibrio, Determinación de las reacciones de vínculo externo.

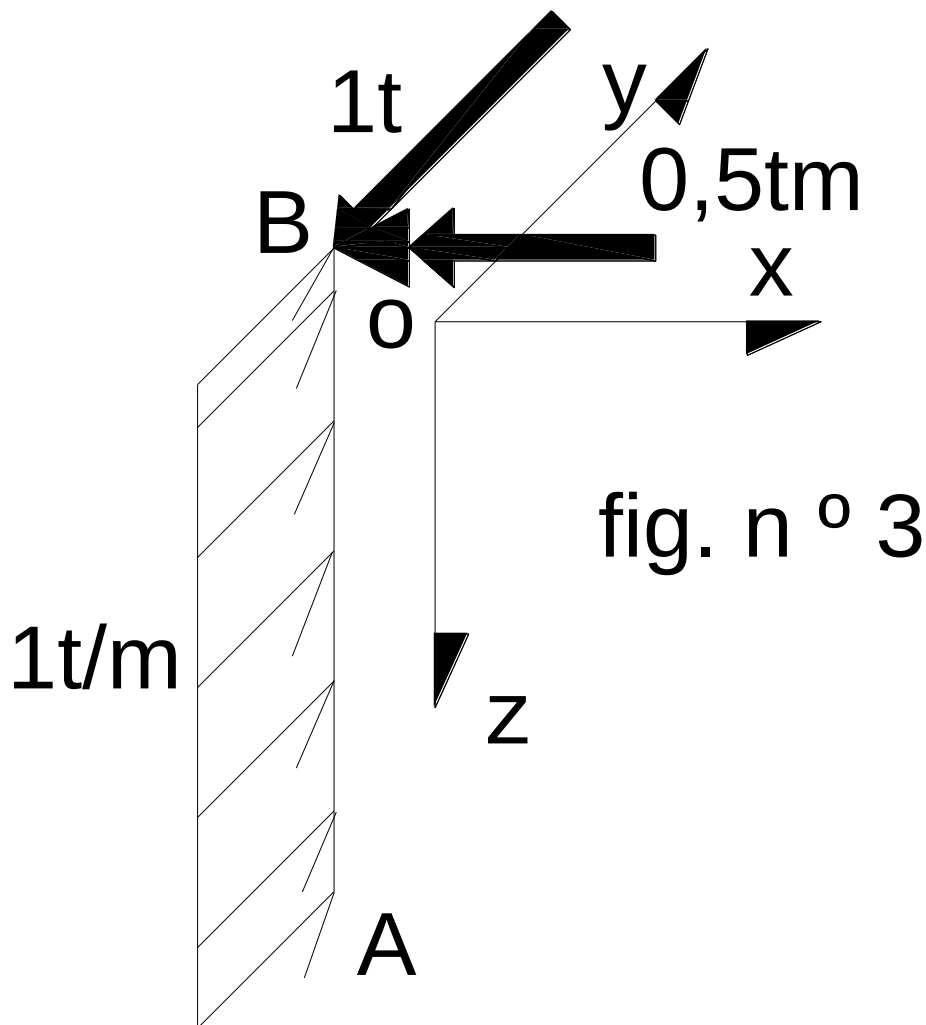
A continuación, planteamos las ecuaciones de equilibrio absoluto con tres ecuaciones de proyecciones de componentes de fuerzas y tres ecuaciones de momentos al rededor de los ejes coordenados, considerando la terna en el baricentro de la sección F.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \sum \text{Proy}_{xx} = 0 & \rightarrow -R_{F-x} + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m - 2t = 0 \rightarrow R_{F-x} = 0 \\
 \sum \text{Proy}_{yy} = 0 & \rightarrow R_{F-y} - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m = 0 \rightarrow R_{F-y} = 1t \\
 \sum \text{Proy}_{zz} = 0 & \rightarrow R_{F-z} - 1 \frac{t}{m} \cdot 2m = 0 \rightarrow R_{F-z} = 2t \\
 \sum \text{Mom}_{xx} = 0 & \rightarrow -M_{F-x} + 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 0,5m = 0 \rightarrow M_{F-x} = 0,5tm \\
 \sum \text{Mom}_{yy} = 0 & \rightarrow M_{F-y} + 1 \frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m = 0 \rightarrow M_{F-y} = -2tm \text{ sentido opuesto } \uparrow \\
 \sum \text{Mom}_{zz} = 0 & \rightarrow M_{F-z} + 1tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 2m = 0 \rightarrow M_{F-z} = 1tm
 \end{aligned} \right\} (1)
 \end{aligned}$$

4 º) Diagramas de esfuerzos característicos



Realizaremos el análisis de los esfuerzos en los distintos tramos de la estructura, comenzando por el tramo **AB**, para lo cual, considerando como centro de reducción el baricentro de la sección **B**, realizamos la reducción de las sollicitaciones existentes en el tramo **BF** obteniéndose las reacciones de vínculo interno que se muestran en la figura n º 3 siguiente,



Luego, ubicamos el tramo de la viga en el plano **z ; y**, y realizamos la construcción de los diagramas de esfuerzos característicos por el método de las pendientes en los baricentros de las secciones, para lo que, consideramos conveniente recordar las siguientes relaciones diferenciales entre esfuerzos característicos y cargas:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{(z)}^y}{dz} = -q_{(z)}^y ; \quad \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = -q_{(z)}^x ; \quad \frac{dN}{dz} = -p \\ \frac{dM_{(z)}^x}{dz} = -Q_{(z)}^y ; \quad \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = -Q_{(z)}^x ; \quad \frac{dM_t}{dz} = 0 \end{array} \right. ;$$

Debemos elegir escalas apropiadas para graficar los diagramas de esfuerzos característicos.

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

$$(3) \begin{cases} Esc Long = \frac{1m}{cm} ; Esc Q_{(z)}^y = Esc Q_{(z)}^x = Esc N = \frac{1t}{cm} \\ Esc M_{(z)}^x = Esc M_{(z)}^y = Esc M_t = \frac{0,5tm}{cm} \end{cases}$$

4

En el tramo **AB**, solo tendremos los diagramas característicos de $Q_{(z)}^y$ y $M_{(z)}^x$, pues los restantes son nulos al no existir los esfuerzos en el tramo.

Comenzando por el diagrama $Q_{(z)}^y$. Para el mismo determinamos la pendiente de la función del esfuerzo cortante en A, que es igual en todo el tramo pues se trata de una carga uniformemente repartida. Considerando un triángulo de base **1m**, al que se debe calcular la altura $a(cm)$ del mismo mediante la expresión,

$$(4) \quad \frac{a(cm) \cdot Esc Q_{(z)}^y}{1m} = -q_{(z)}^y$$

En nuestro caso, resultará,

$$\frac{a(cm) \cdot \frac{1t}{cm}}{1m} = -1 \frac{t}{m} \rightarrow a = -1cm$$

Lo que implica que debemos trazar un segmento de 1 cm en A' hacia arriba.

Continuando con el diagrama de momentos flectores $M_{(z)}^x$, en forma análoga a la descripta anteriormente. Determinamos el valor $a(cm)$ mediante la expresión,

$$(5) \quad \frac{a(cm) \cdot Esc M_{(z)}^x}{1m} = -Q_{(z)}^y$$

En nuestro caso, resultará, como el diagrama de esfuerzos cortantes es lineal, existirán infinitos valores de pendientes correspondientes a las infinitas secciones del tramo. Se determinarán las pendientes correspondientes en los baricentros de las secciones **A** y **B**.

en A con $Q_{(z=1m)}^y = 0$ resulta, $a(cm) = 0$

mientras que en **B** con $Q_{(z=0)}^y = 1t$, resulta,

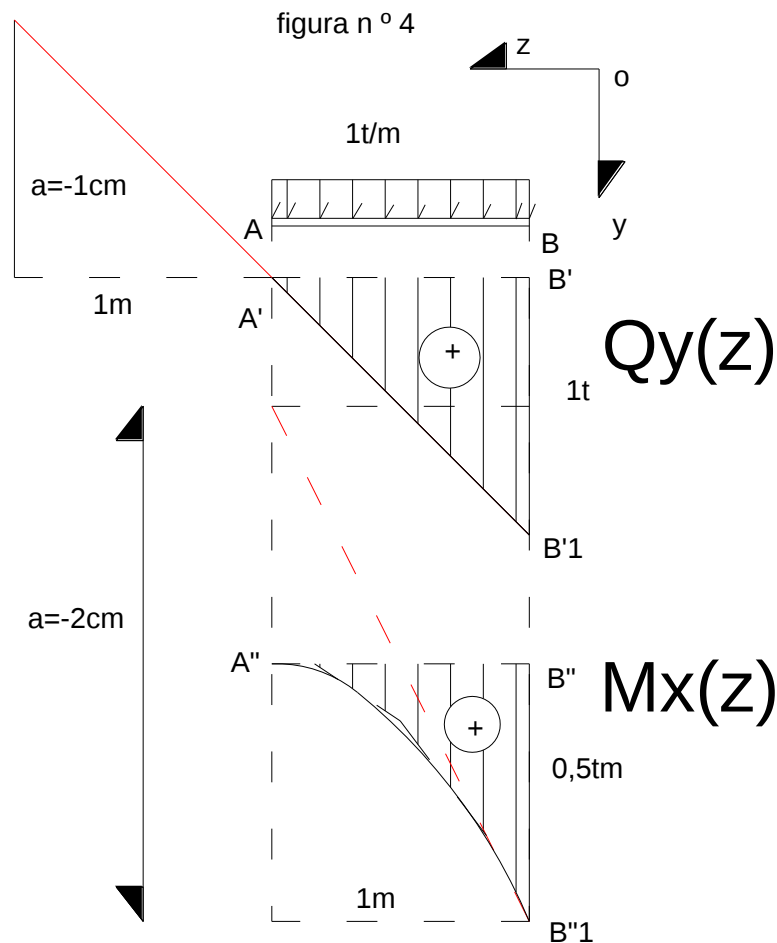
$$\frac{a(cm) \cdot 0,5 \frac{tm}{cm}}{1m} = -1t \rightarrow a(cm) = -2cm$$

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

Lo que implica que debemos trazar un segmento de 2 cm hacia arriba para construir la pendiente en B.

5

En la figura n º 4 siguiente se muestran los diagramas de esfuerzos característicos en el tramo analizado.



A continuación, explicamos la construcción geométrica de los diagramas de esfuerzos característicos mediante el método de las tangentes;

- * 1 º) determinamos la altura $a_1(cm)$ y $a_2(cm)$ en $A''1$ y $B''1$, respectivamente,
- * 2 º) para el trazado de las tangentes, conociendo los valores de los esfuerzos $X(zA)$ y $X(zB)$ en los puntos mencionados, trazamos sendos segmentos de $1m$ en $A''1$ y $B''1$, y luego las alturas calculadas $a(cm)$. Seguidamente, construimos los triángulos correspondientes $A''PT$ y $B''QR$,
- * 3 º) Ambas tangentes se interceptan en el punto M en la figura n º 5, quedándonos definidos los sub segmentos $\overline{A''M}$ y $\overline{B''M}$ respectivamente.

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

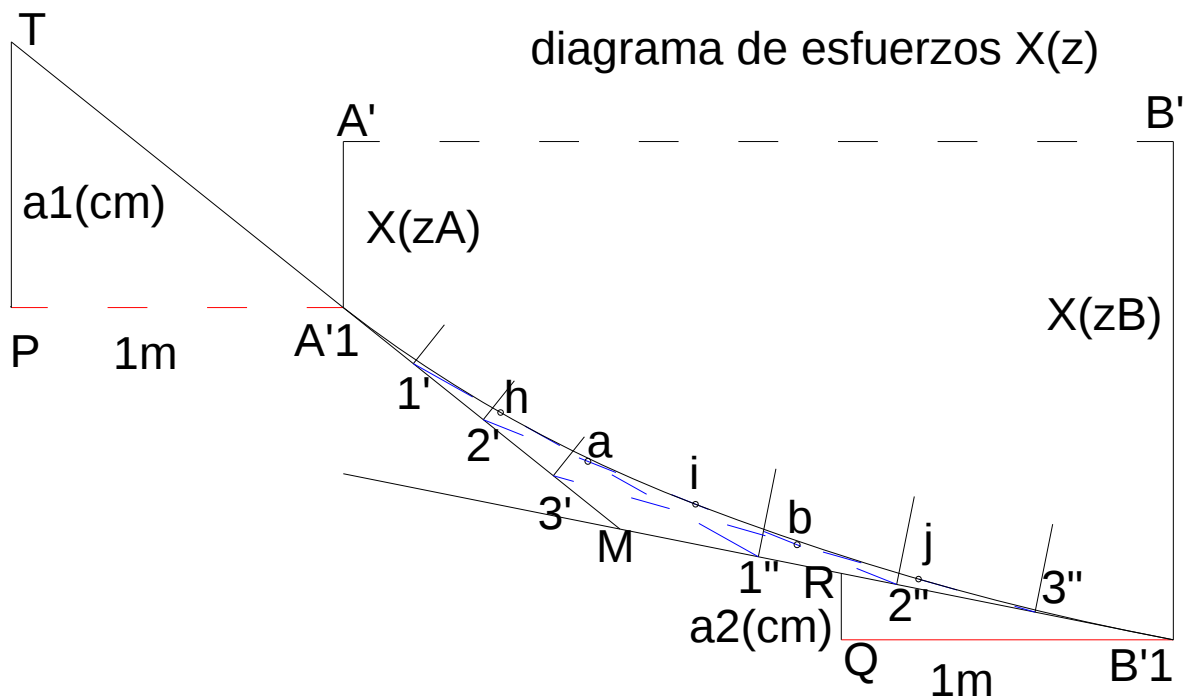
* 4 º) dividimos los sub segmentos $\overline{A_1''M}$ y $\overline{B_1''M}$ en igual cantidad arbitraria de divisiones, por ejemplo 4, aunque cabe destacar que a mayor número de divisiones, se obtendrá mayor precisión en el trazado de la gráfica. En nuestro ejemplo las divisiones son **1'; 2' ; 3' y 1'' ; 2'' y 3''** respectivamente;

* 5 º) Seguidamente conectamos los puntos **1'** con **1''** , **2'** con **2''**, y **3'** con **3''** quedando establecidos los segmentos $\overline{1'1''}$; $\overline{2'2''}$ y $\overline{3'3''}$ respectivamente,

* 6 º) Estos segmentos se interceptan en los puntos **a** y **b**, quedando formado los segmentos internos definidos por $\overline{1'a}$; $\overline{ab}$; $\overline{b3''}$;

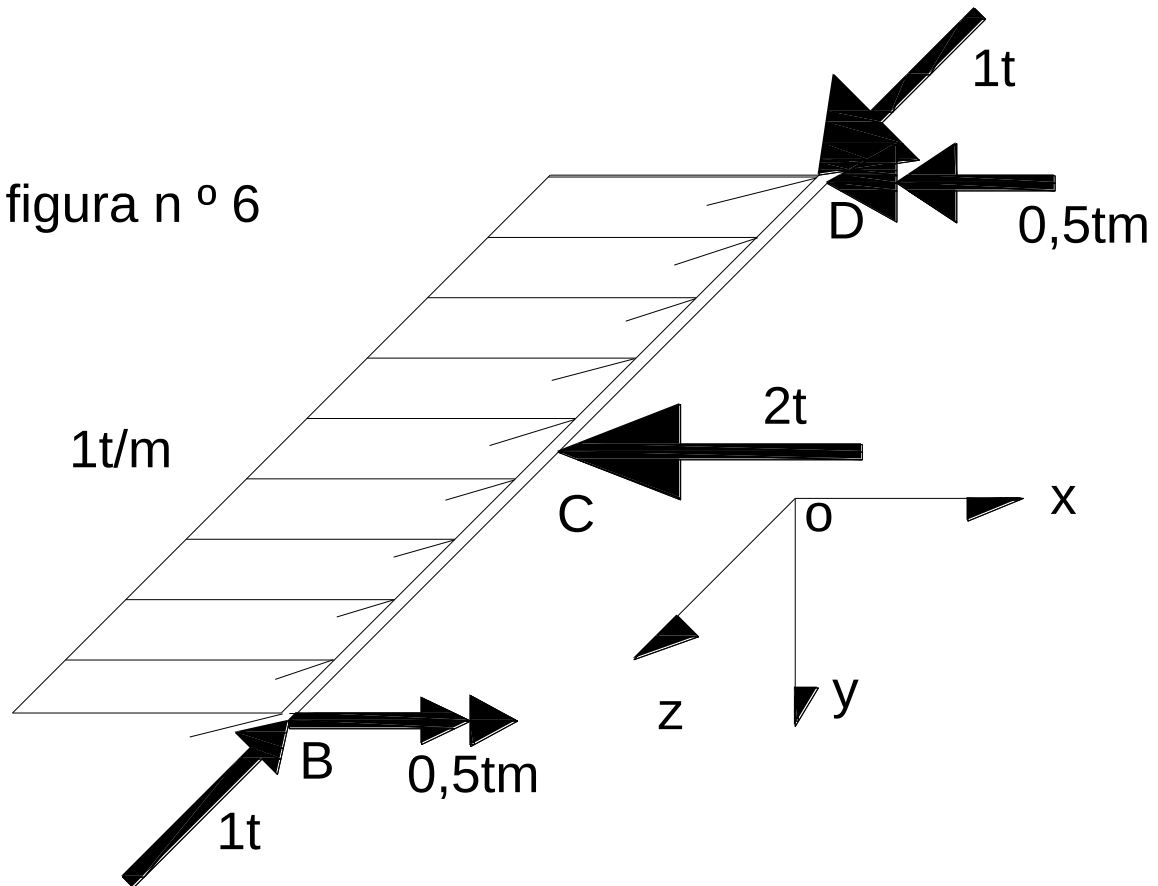
* 7 º) las mediatrices **h, i, j** de los segmentos del ítem 6 º serán los puntos de apoyo para el trazado de la curva representativa de la función que se pretende representar.

figura n º 5



Continuamos con la construcción de los diagramas de esfuerzos característicos en el tramo **BCD**, para lo cual, ubicamos la terna local de referencia como indica la figura n º 6.

figura n ° 6



Luego, de la reducción los baricentros de las secciones **B** y **D** resultan,

$$(6) \begin{cases} \text{en B, } N = -1t; \mathbf{M}_{(z)}^x = 0,5tm \\ \text{en D, } N = 1t; \mathbf{M}_{(z)}^x = -0,5tm \end{cases}$$

Para realizar las reducciones anteriores, en el caso de la sección **B** bastará con invertir los sentidos de los esfuerzos en la misma sección del tramo **AB**, mientras que en el extremo **D** se deberá efectuar esta reducción de los esfuerzos del tramo **DEF** que se ha eliminado, resultando como se indica en la figura n ° 6.

En el análisis de los esfuerzos del tramo **BCD**, comenzamos por los esfuerzos normales.

Observamos de la figura n ° 6 que al no existir una carga repartida en la dirección del eje **z**, la ecuación diferencial se transforma en,

$$(7) \left\{ \frac{dN}{dz} = 0 \quad ; \quad \rightarrow N = \text{cte, en } z = 2m \rightarrow N = -1t \right.$$

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**



Continuamos con el análisis de los esfuerzos cortantes $Q_{(z)}^x$. El mismo lo analizamos en 2 tramos (**BC y CD**), debido a la existencia de la carga concentrada en **C** representando esta una discontinuidad en dicho diagrama. Surgiendo del análisis,

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \text{en B, } \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = -1 \text{ t/m} \rightarrow Q_{(z)}^x = -\int 1 \frac{t}{m} dz + k = -1 \frac{t}{m} \cdot z + k \text{ para } z = 2m \quad Q_{(z)}^x = 0, \\ \rightarrow k = 2t \\ \text{en C, luego de actuar la carga de } 2t \quad \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = -1 \text{ t/m} \\ \rightarrow Q_{(z)}^x = -\int 1 \frac{t}{m} dz + k = -1 \frac{t}{m} \cdot z + k_1 \text{ para } z = 1m \quad Q_{(z)}^x = -1t \rightarrow k_1 = 0 \end{array} \right.$$

Cálculo de los valores **a(cm)**. Bastará con calcular solamente un valor **a**, pues se trata de una carga uniformemente repartida, resultando de esta,

$$(9) \quad \frac{a(\text{cm}) \cdot \text{Esc } Q_{(z)}^x}{1m} = -q_{(z)}^x \rightarrow a(\text{cm}) = -\frac{1 \frac{t}{m} \cdot 1m}{1 \frac{t}{cm}} - 1cm$$

Continuamos con $M_{(z)}^y$, para lo cual determinamos los valores **a(cm)** en los tramos **BC y CD** debido a que el esfuerzo cortante tiene signos diferentes en estos tramos, surgiendo de estos análisis,

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \text{en B, } \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = 0 \\ \text{en C previo a la acción de la carga de } 2t, \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = 1t \\ \text{en C posterior a la acción de la carga de } 2t, \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = -1t \\ \text{en D, } \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = 0 \end{array} \right.$$

Cálculo de los valores **a** en las secciones indicadas,

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

9

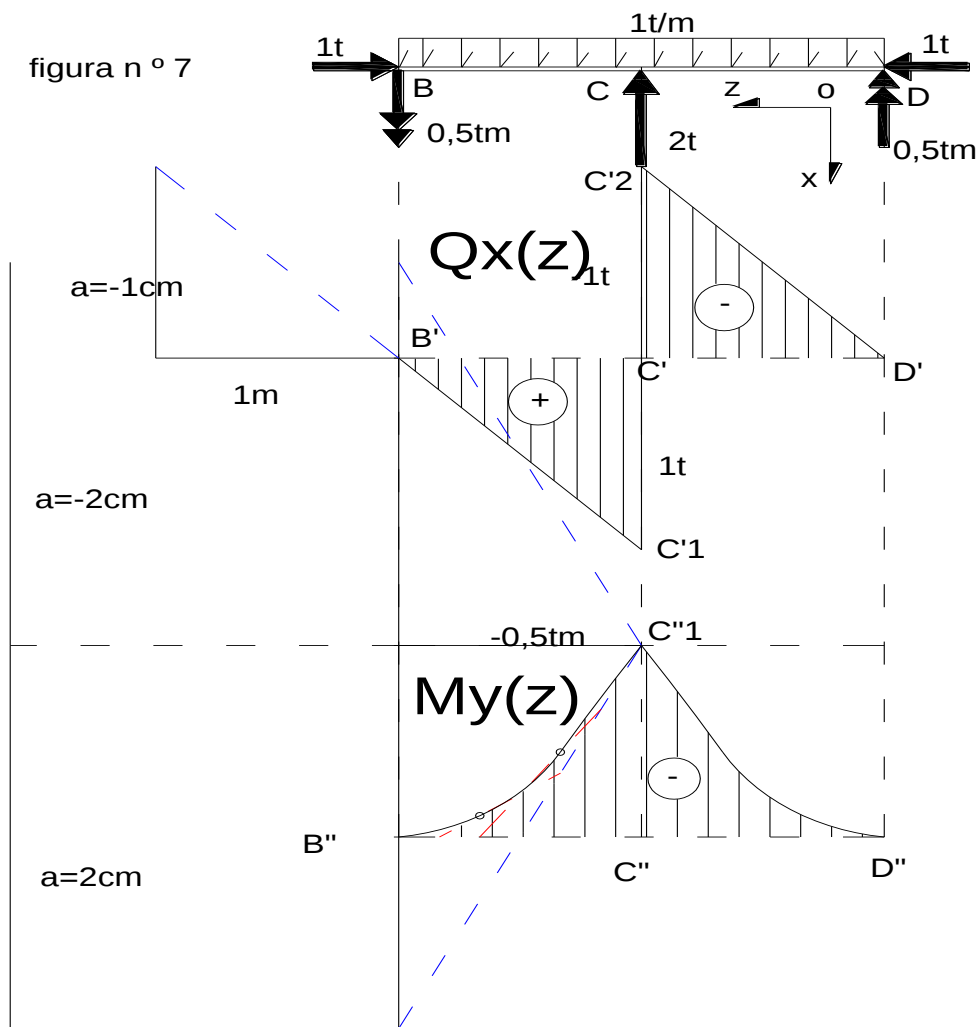
$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{en B, } a(\text{cm}) = 0 \\
 &\text{en C previo a la acción de la carga de } 2t, \frac{a(\text{cm}) \cdot \text{Esc } M_{(z)}^y}{1\text{m}} = Q_{(z)}^x \\
 (11) \quad &a(\text{cm}) = \frac{1t \cdot 1\text{m}}{0,5 \frac{\text{tm}}{\text{cm}}} = 2\text{cm} \\
 &\text{en C posterior a la aplicación de la carga de } 2t, a(\text{cm}) = -\frac{1t \cdot 1\text{m}}{0,5 \frac{\text{tm}}{\text{cm}}} = -2\text{cm} \\
 &\text{en D, } a(\text{cm}) = 0
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Concluimos con el análisis del momento $M_{(z)}^x$. Sabiendo que en el tramo BCD, $Q_{(z)}^y = 0$, entonces,

$$(12) \quad \frac{dM_{(z)}^x}{dz} = -Q_{(z)}^y; \rightarrow \frac{dM_{(z)}^x}{dz} = 0 \rightarrow M_{(z)}^x = \text{cte} \rightarrow z = 2\text{m}, M_{(z=2\text{m})}^x = 0,5\text{tm}$$

A continuación, con estos datos, graficamos los diagramas de esfuerzos característicos en la figura n º 7.

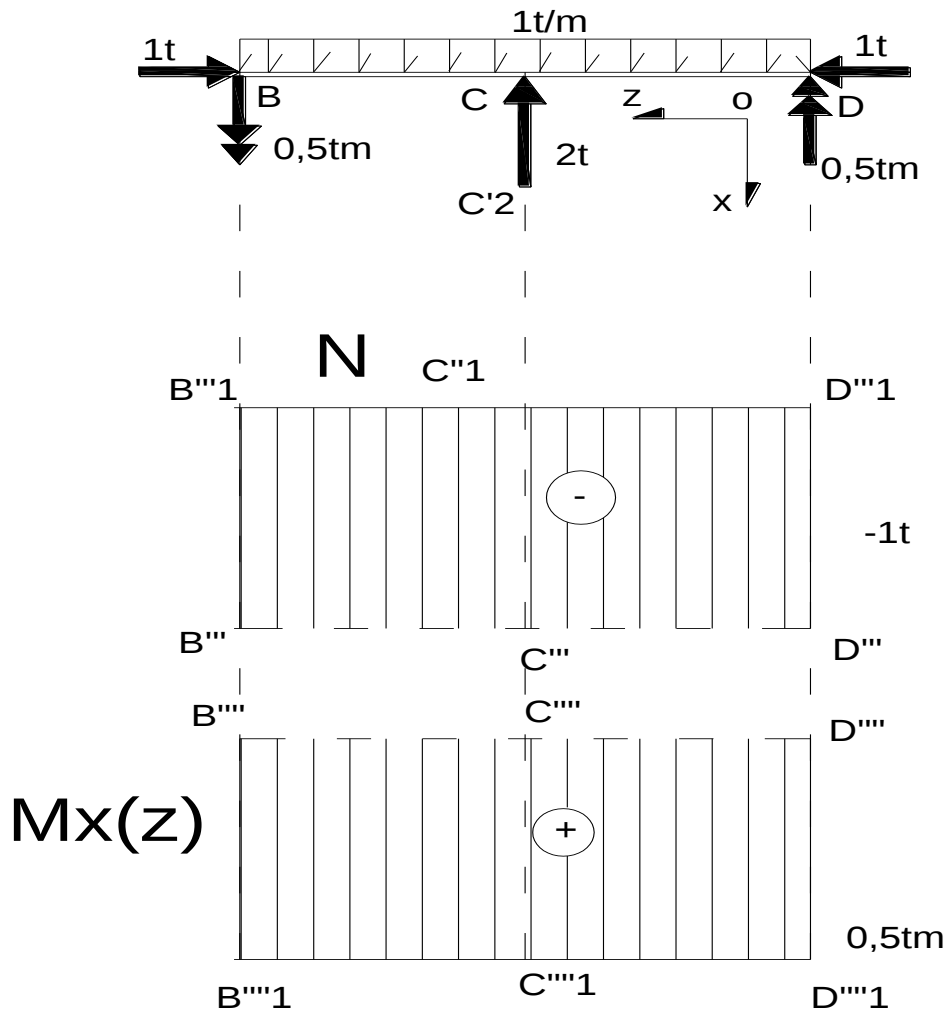
**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**



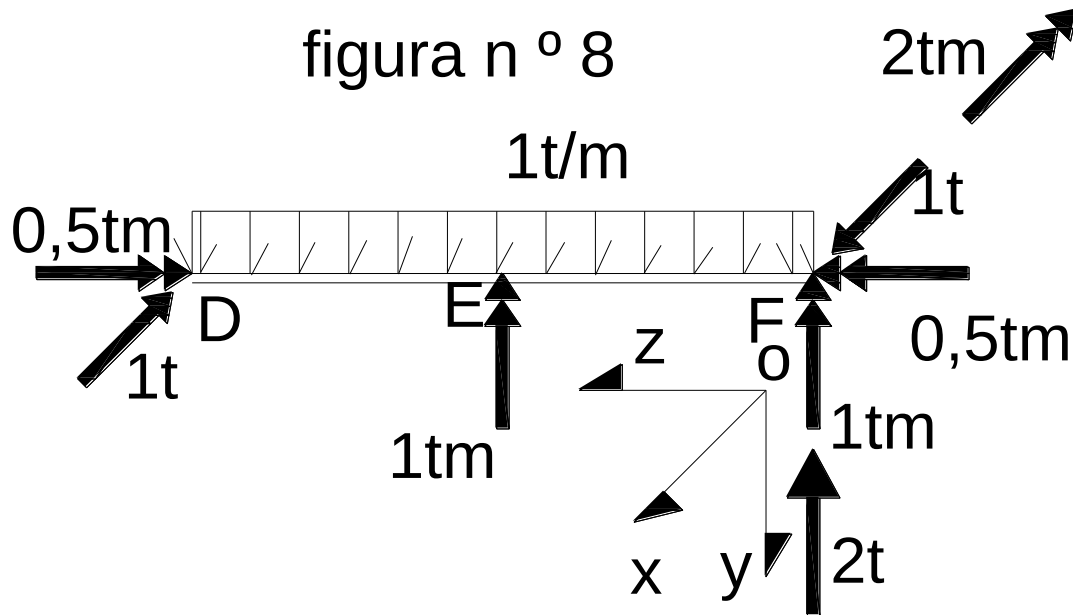
Continuamos con los restantes diagramas en la figura n ° 7a, por falta de espacio en la figura anterior

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

figura n ° 7a



Finalizamos el ejercicio con el análisis de los esfuerzos característicos del tramo **DEF**, para lo cual, ubicamos la terna local de referencia como indica la figura n ° 8.



Luego de las reducciones en las secciones **D** y **F** resultan los siguientes esfuerzos:

$$(13) \begin{cases} \text{en D, } M_t = -0,5tm; Q_{(z)}^x = -1t \\ \text{en F, } M_t = 0,5tm; Q_{(z)}^x = 1t; Q_{(z)}^y = -2t; M_{(z)}^x = -2tm; M_{(z)}^y = -1tm \end{cases}$$

Para realizar las reducciones en la sección **D**, basta con invertir los sentidos de los esfuerzos correspondientes a la sección **D** correspondiente al tramo **BCD**, en virtud del equilibrio en el baricentro de la sección, mientras que en el baricentro de la sección **F**, bastará considerar las reacciones de vínculo en la misma.

Comenzamos con el análisis del esfuerzo cortante $Q_{(z)}^y$, cuya carga en todo el tramo es uniformemente distribuida $q_{(z)}^y = 1 \frac{t}{m}$. De aquí, determinamos la pendiente para la construcción del diagrama $Q_{(z)}^y$ en **D**, válida para todo el tramo **DEF**.

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

$$(14) \quad a(\text{cm}) = -\frac{1\frac{t}{m} \cdot 1m}{1\frac{t}{\text{cm}}} = -1\text{cm}$$

Luego, el esfuerzo cortante en F será $Q_{(F)}^y = 2\text{cm} \cdot 1\frac{t}{\text{cm}} = 2t$.

Continuando con el análisis del diagrama de momentos flectores $M_{(z)}^x$, cuyos valores extremos son, $M_{(D)}^x = 0$; $M_{(F)}^x = 2tm$. Cálculo de pendientes, determinación de alturas a ,

$$(15) \quad \begin{cases} \text{en D, } Q_{(z)}^y = 0 \rightarrow a(\text{cm}) = 0 \\ \text{en F, } Q_{(z)}^y = 2t; \rightarrow a(\text{cm}) = -\frac{2t \cdot 1m}{0,5\frac{tm}{\text{cm}}} = -4\text{cm} \end{cases}$$

A continuación, analizamos los esfuerzos cortantes $Q_{(z)}^x$. Al no tener carga distribuida en la dirección x , resulta,

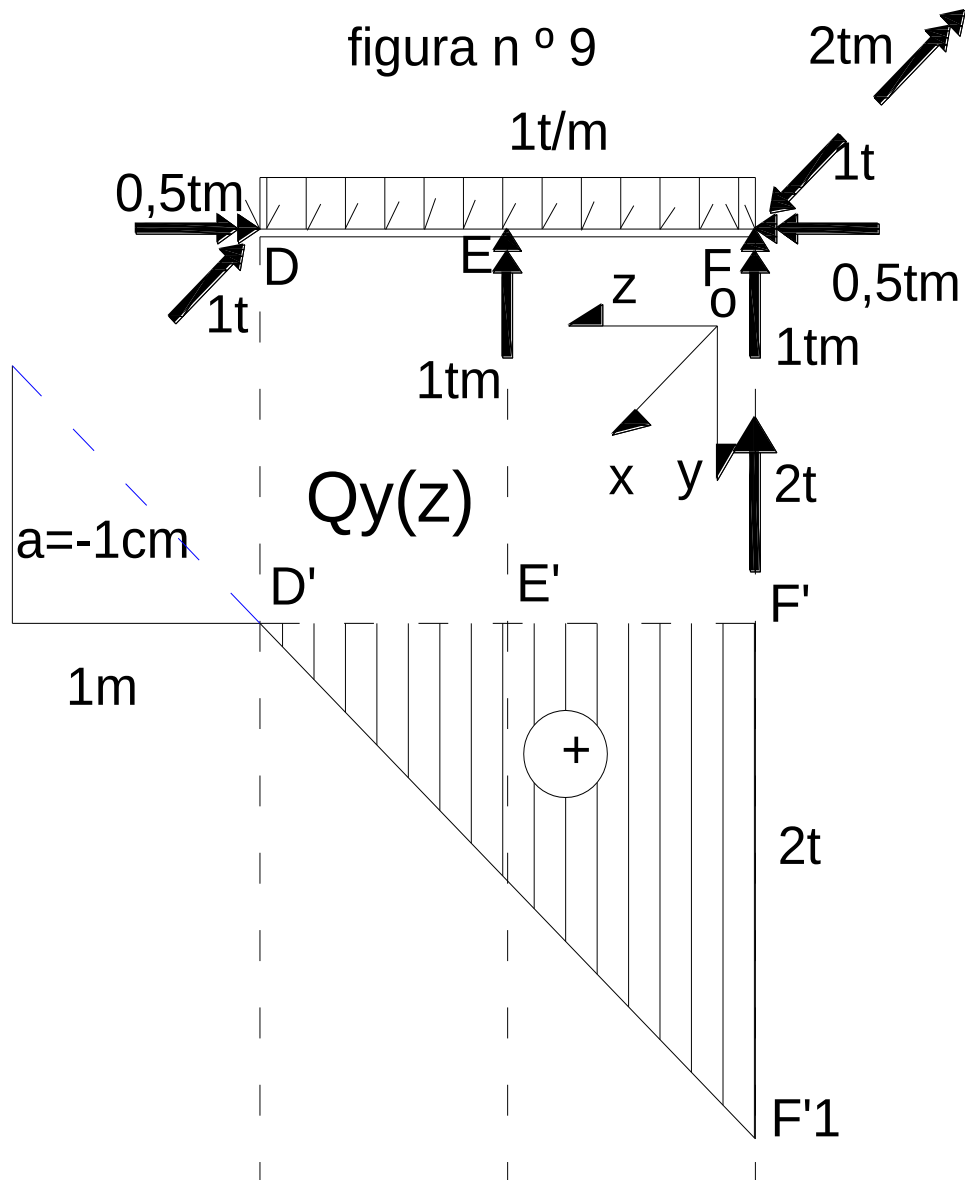
$$(16) \quad \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = 0 \rightarrow Q_{(z)}^x = \text{cte} \therefore z = 2m, \rightarrow Q_{(z)}^x = -1t$$

Seguidamente, corresponde analizar los momentos flectores $M_{(z)}^y$, el cual, debido a que tenemos un esfuerzo cortante $Q_{(z)}^x$ que es constante en todo el tramo, entonces, el diagrama $M_{(z)}^y$ será lineal. Luego, en E actúa un momento $-2tm$, que representa una discontinuidad del diagrama de momentos flectores, siendo el momento flector en la sección posterior a E, $M_{(z)}^y = 1tm - 1tm = 0$. La construcción del diagrama de momentos flectores continúa con una recta paralela a la anterior según lo explicado anteriormente.

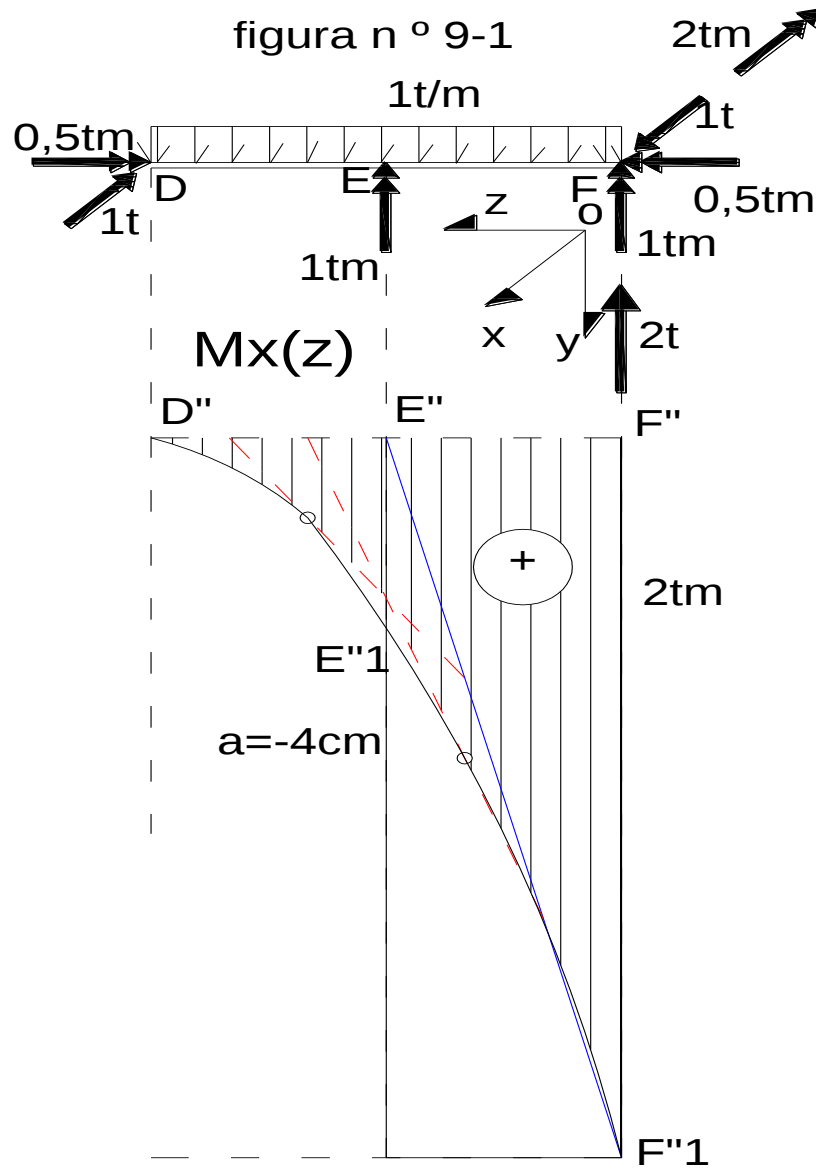
Concluimos con el diagrama de momentos flectores M_t , debido a que no existen esfuerzos normales en el tramo DEF. De la relación,

$$(17) \quad \frac{dM_t}{dz} = 0 \rightarrow M_t = \text{cte}, z = 2m, M_t = -0,5tm$$

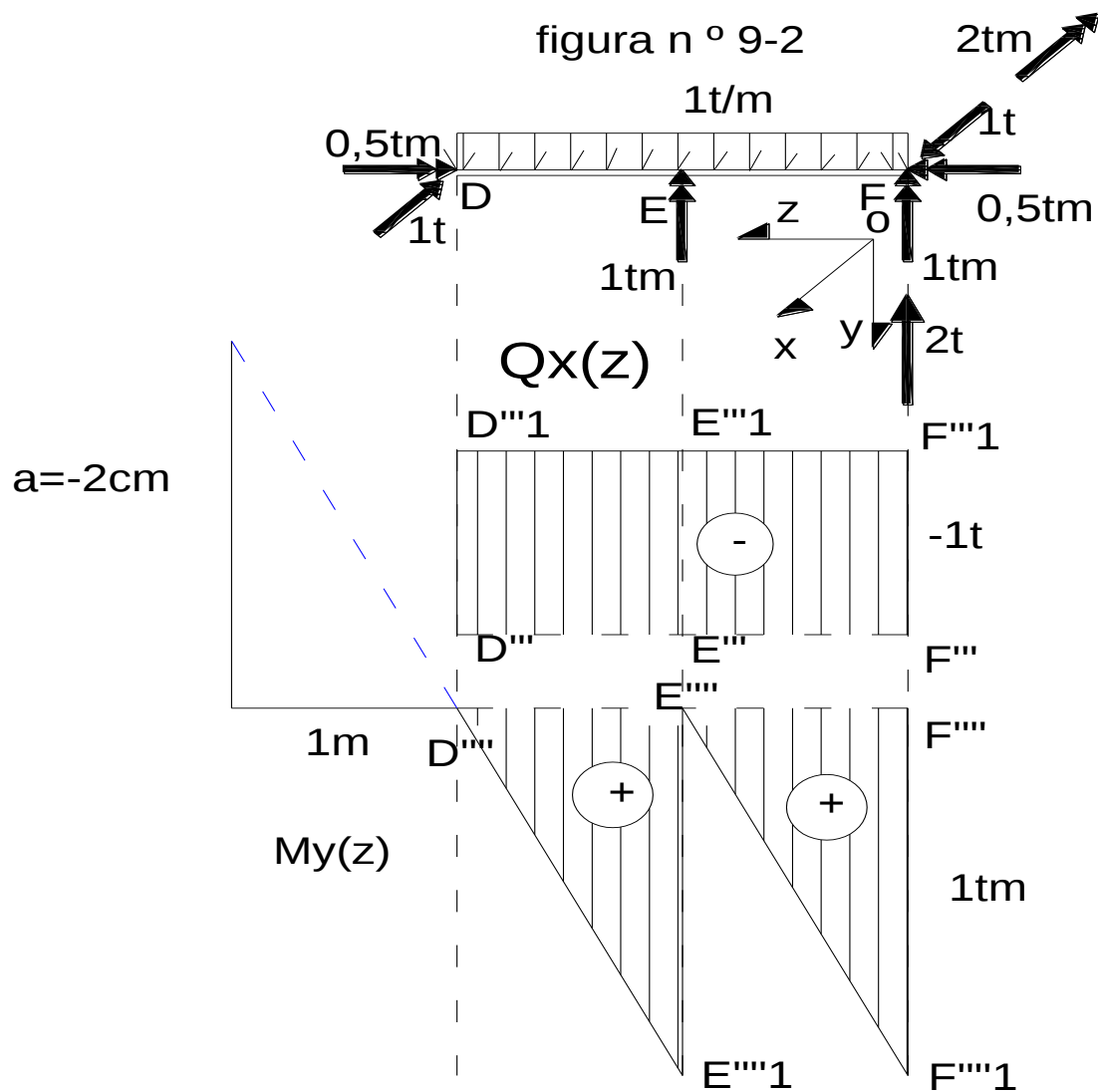
A continuación, con los datos obtenidos, en la figura n° 9, graficamos los diagramas de esfuerzos característicos en el tramo.



Ahora, representamos en la figura n ° 9-1 el diagrama de momentos $M_{(z)}^x$, a los efectos de que el mismo se pueda apreciar con mayor precisión su construcción, y porque representando todos los diagramas en la figura n ° 9, llevaría a difícil visualización de los mismos debido a su reducido tamaño.

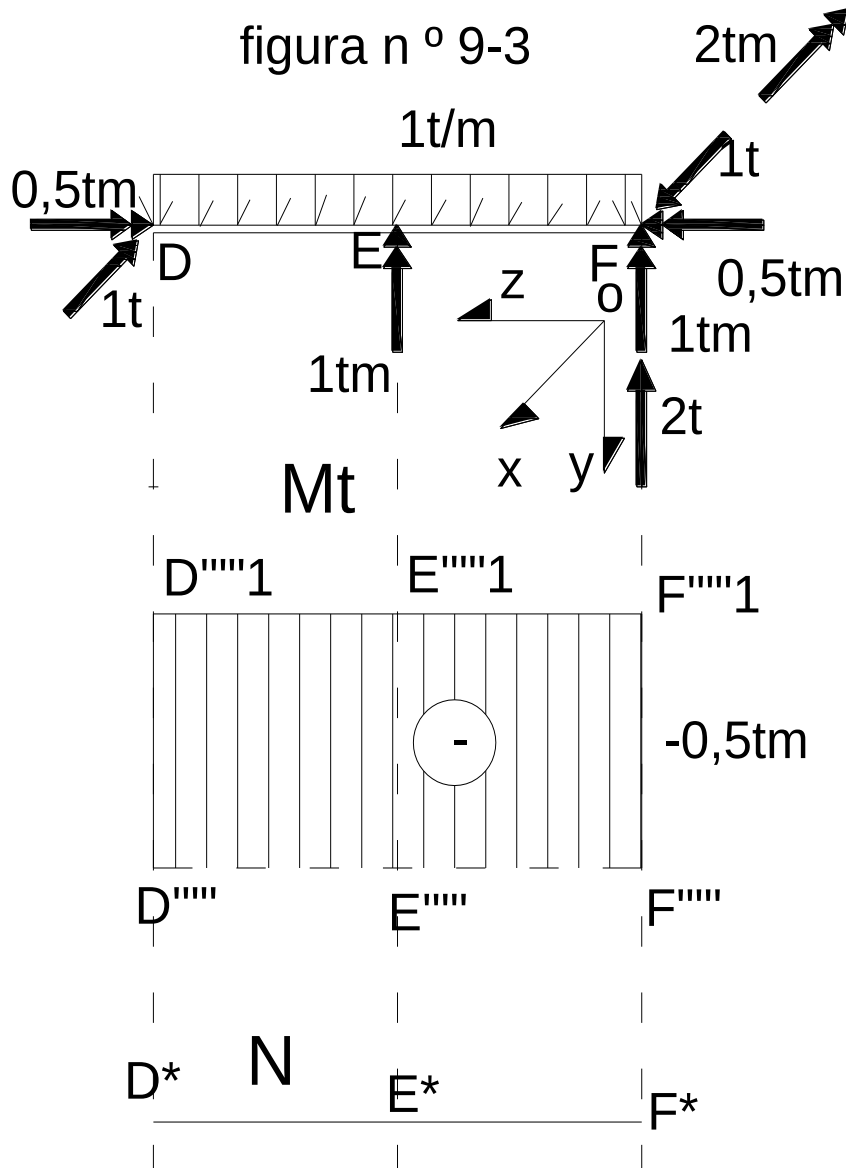


En la figura n ° 9-2 representamos los diagramas $Q_{(z)}^x$, y $M_{(z)}^y$, por las mismas razones que en el caso anterior.



Finalizamos la construcción de los diagramas de esfuerzos característicos con el diagrama de momentos torsores M_t y esfuerzos normales N en la figura n ° 9-3.

figura n ° 9-3

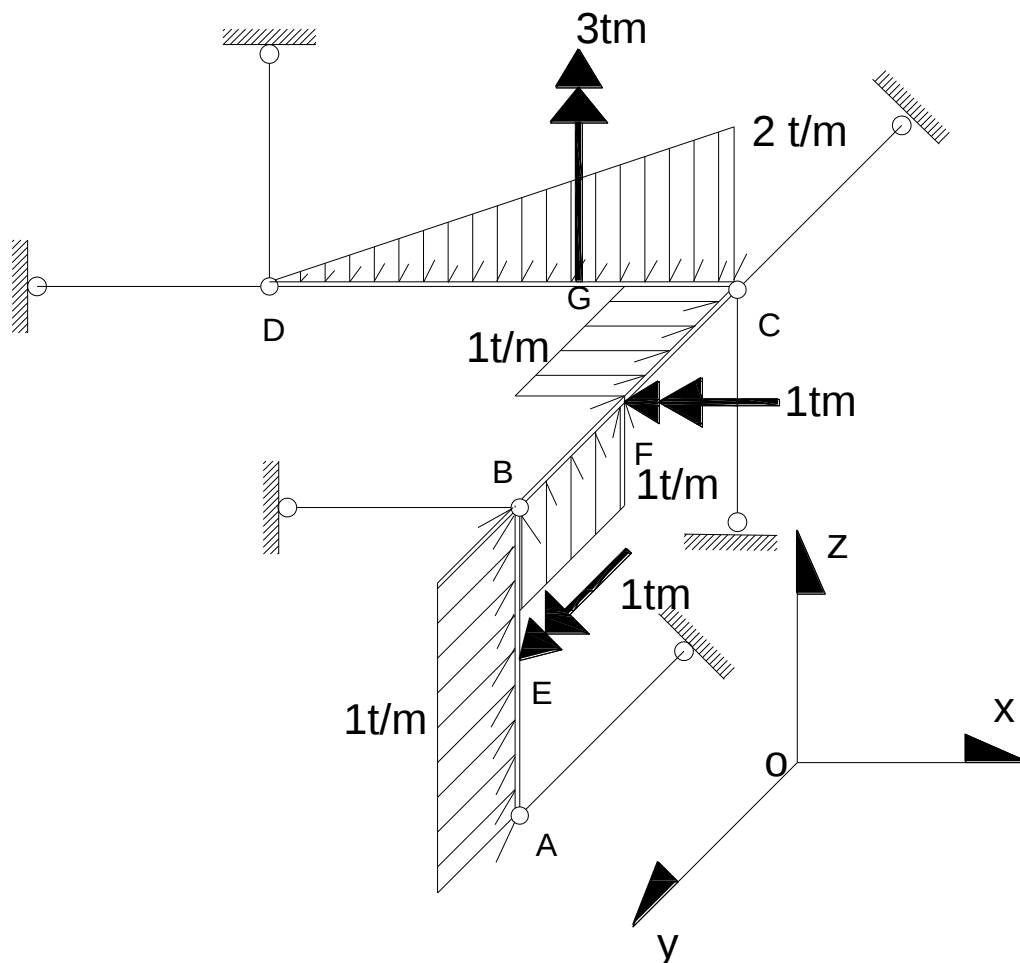


**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

PROBLEMA N º 2: DETERMINAR LAS REACCIONES DE VÍNCULO, Y CONSTRUIR LOS DIAGRAMAS DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTE A LA ESTRUCTURA DE LA FIGURA N º 10.

18

figura n º 10



$$\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BF} = \overline{FC} = \overline{CG} = 1m ; \overline{GD} = 2\overline{AE}$$

Resolución

1 º) Análisis cinemático:

Tratándose de una viga quebrada, la misma posee **6 grados de libertad**, que se restringen con el empleo de **6 apoyos de primera especie o bielas**. Según se observa en la figura n º 10, no hay más de tres bielas concurrentes al mismo punto, como el nodo **C**, con lo cual no hay vinculación aparente. No existe la posibilidad que la viga pueda girar alrededor de un eje por no concurrir más de 5 bielas al mismo eje, que es el eje **DC**. En estas condiciones, afirmamos que el sistema es **cinemáticamente invariable CI**, por consiguiente es compatible determinado, y tiene solución única.

2 º) Diagrama de sólido libre.

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

Mientras que las ecuaciones de sumatorias de momentos respecto de los ejes coordenados, quedan,



$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow -1\frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m - 1tm + 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 0,5m - 3t \cdot 2m + C_y \cdot 2m + C_z \cdot 2m - D_z \cdot 2m = 0 \rightarrow C_y + C_z - D_z = 4,25t \\ \sum Mom_{yy} = 0 \rightarrow B_x \cdot 2m + D_z \cdot 3m - D_x \cdot 2m + 1tm - 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 2m + 3t \cdot 1m = 0 \\ B_x + \frac{3}{2}D_z - D_x = -1t \\ \sum Mom_{zz} = 0 \rightarrow 3tm - 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 1,5m - D_x \cdot 2m = 0 \rightarrow D_x = \frac{3}{4}t \end{array} \right.$$

De los sistemas (1) y (2), surgen los siguientes valores de reacciones de vínculo:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} A_y = -\frac{1}{4}t \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado}; B_x = \frac{7}{4}t; C_y = \frac{9}{4}t; C_z = \frac{2}{3}t \\ D_x = \frac{3}{4}t \text{ (ya determinado)}; D_z = -\frac{4}{3}t \rightarrow \text{sentido opuesto al asignado} \end{array} \right.$$

En el siguiente paso, procedemos a verificar los valores de las reacciones obtenidas.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \sum Proj_{xx} = 0 \rightarrow \frac{3}{4}t + 1t - \frac{7}{4}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Proj_{yy} = 0 \rightarrow \frac{9}{4}t - 2t - \frac{1}{4}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Proj_{zz} = 0 \rightarrow \frac{4}{3}t - 2t + \frac{2}{3}t = 0 \text{ verifica la igualdad} \end{array} \right.$$

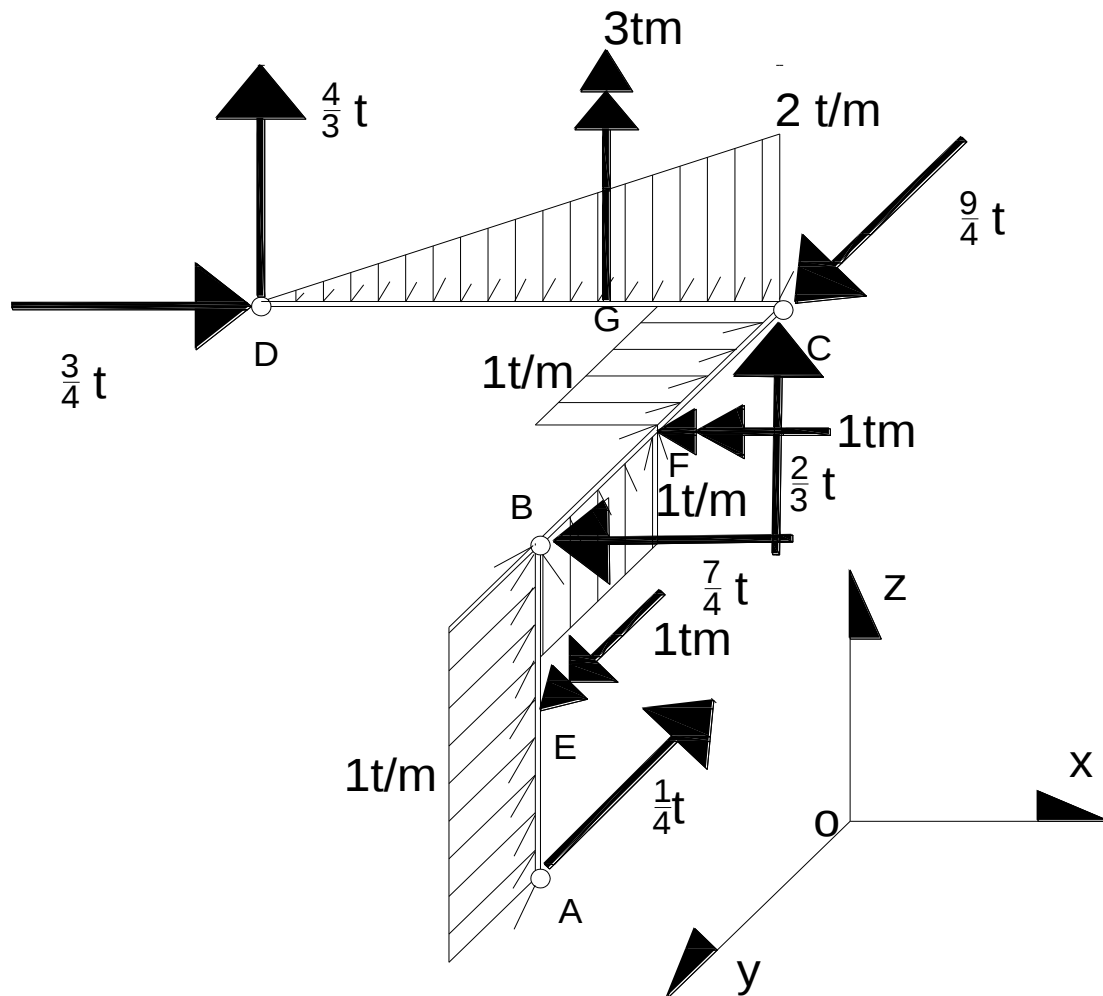
Para la verificación de las ecuaciones de momentos, ubicamos la terna de referencia en A.

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx} = 0 \rightarrow -1tm - 1\frac{t}{m} \cdot \frac{3}{2}m + 1\frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 1m + \frac{1}{4}t \cdot 2m = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Mom_{yy} = 0 \rightarrow 1tm + 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot 3m - 3t \cdot 2m + \frac{2}{3}t \cdot 3m = 0 \text{ verifica la igualdad} \\ \sum Mom_{zz} = 0 \rightarrow 3tm + 1\frac{t}{m} \cdot 2m \cdot 3m + 1\frac{t}{m} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}t \cdot 3m - \frac{7}{4}t \cdot 2m - \frac{9}{4}t \cdot 3m = 0 \\ \text{verificada esta última igualdad, confirmamos las reacciones anteriores} \end{array} \right.$$

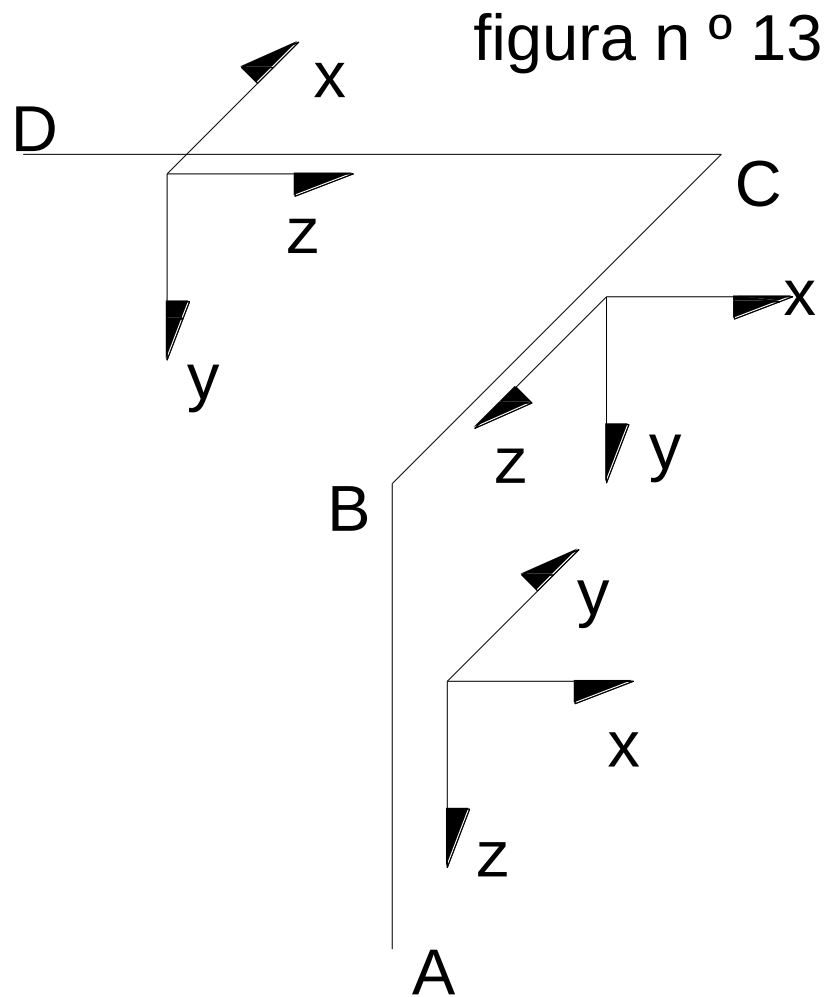
4 º) Diagramas de esfuerzos característicos.

Previamente al trazado de los diagramas de esfuerzos característicos, indicaremos en la figura n º 12, un diagrama de sólido libre con las magnitudes correspondientes de las reacciones de vínculo.

figura n ° 12



A continuación, en la figura n ° 13 mostramos un esquema de las ternas locales correspondientes a cada tramo.



Recordando las relaciones diferenciales entre esfuerzos característicos,

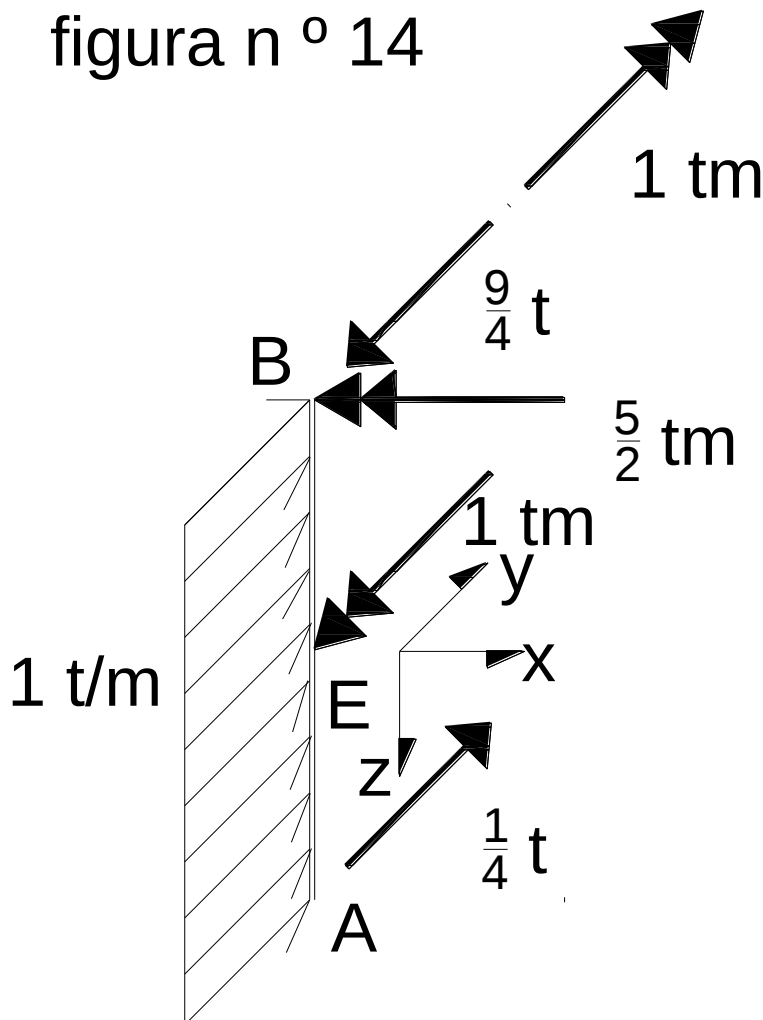
$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = -q_{(z)}^x ; \quad \frac{dN}{dz} = -q ; \quad \frac{dQ_{(z)}^y}{dz} = -q_{(z)}^y \\ \frac{dM_{(z)}^x}{dz} = -Q_{(z)}^y ; \quad \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = Q_{(z)}^x ; \quad \frac{dM_t}{dz} = 0 \end{array} \right.$$

Comenzamos analizando los esfuerzos característicos en el tramo **AB**, para lo cual, elegimos las siguientes escalas de las gráficas de los mismos:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} Esc \text{ Long} = \frac{1m}{cm} ; \quad Esc \text{ N} = Esc \text{ } Q_{(z)}^y = Esc \text{ } Q_{(z)}^x = \frac{1t}{cm} \\ Esc \text{ } M_t = Esc \text{ } M_{(z)}^x = Esc \text{ } M_{(z)}^y = \frac{1tm}{cm} \end{array} \right.$$

En la figura n ° 14 se muestra las solicitaciones en el tramo **AB**, resultantes de las reducciones al nodo **B** de la parte derecha de la viga.

figura n ° 14



Esfuerzo $Q_{(z)}^y$, determinación de las pendientes. Siendo $q_{(z)}^y = 1 \frac{t}{m}$,

en A la altura $a(\text{cm})$ de la pendiente es,

$$a(\text{cm}) = -\frac{1 \frac{t}{m} \cdot 1m}{1 \frac{t}{\text{cm}}} \rightarrow a(\text{cm}) = -1\text{cm} \quad (8)$$

Al ser una carga uniformemente repartida, la pendiente de la misma no varía, y, no existiendo cargas concentradas, el diagrama de esfuerzos cortantes es función lineal continua hasta B.

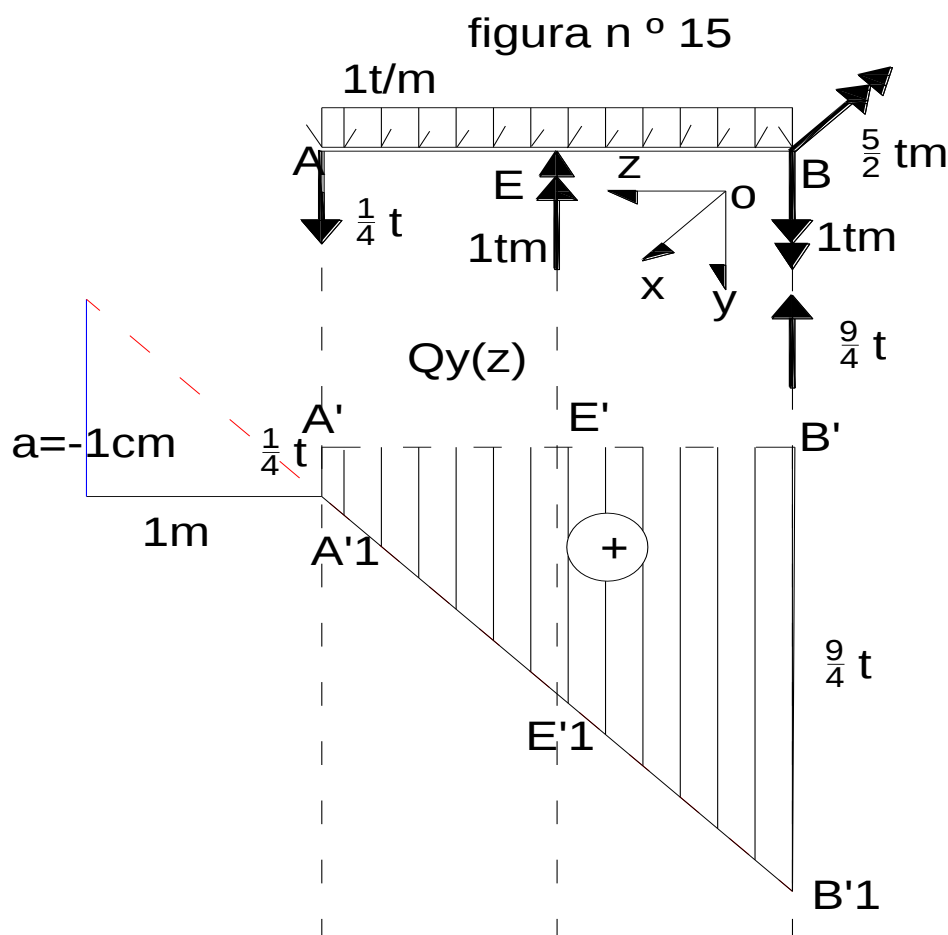
Continuamos con el momento flector $M_{(z)}^x$. Siendo el esfuerzo $Q_{(z)}^y$ una función lineal, entonces el momento flector mencionado es una función cuadrática. Al no existir momentos flectores intermedios en el tramo que se analiza, determinamos las magnitudes $a(\text{cm})$ en A y B, siendo en A $Q_{(z)}^y = \frac{1}{4}t$, y en B $Q_{(z)}^y = \frac{9}{4}t$, resultan los siguientes valores a:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \text{en A, } a(\text{cm}) = \frac{\frac{1}{4}t \cdot 1\text{m}}{\frac{1\text{tm}}{\text{cm}}} \rightarrow a(\text{cm}) = \frac{1}{4}\text{cm} \\ \text{en B, } a(\text{cm}) = \frac{\frac{9}{4}t \cdot 1\text{m}}{\frac{1\text{tm}}{\text{cm}}} \rightarrow a(\text{cm}) = \frac{9}{4}\text{cm} \end{array} \right.$$

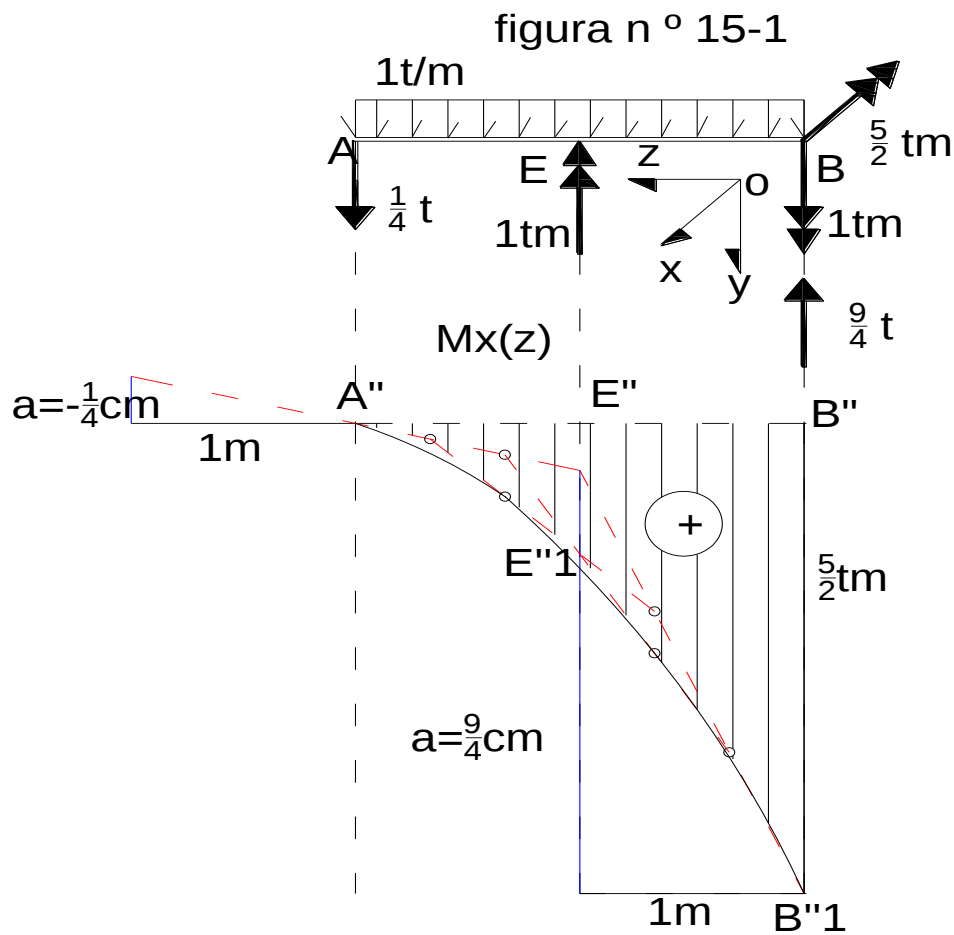
Finalizamos el análisis de esfuerzos en el tramo con $M_{(z)}^y$. Debido a que el esfuerzo $Q_{(z)}^x$ es nulo en el tramo, entonces resulta,

$$(10) \quad \frac{dM_{(z)}^y}{dz} = 0 ; M_{(z)}^y = \text{cte} \rightarrow z = 2\text{m} ; M_{(z)}^y = 0 ; z = 1\text{m} \rightarrow M_{(z)}^y = -1\text{tm}$$

En la figura n º 15 mostramos el diagrama $Q_{(z)}^y$ y su construcción.

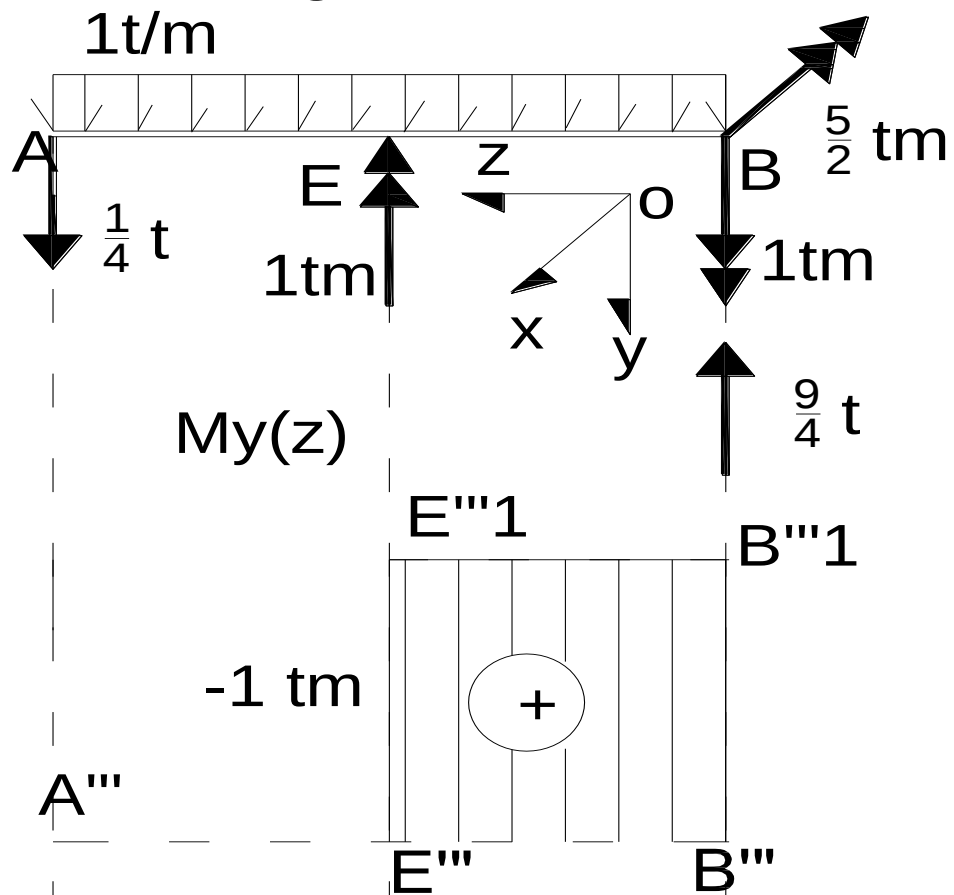


Luego, en la figura n º 15-1 mostramos el diagrama de $M_{(z)}^x$ y su construcción.



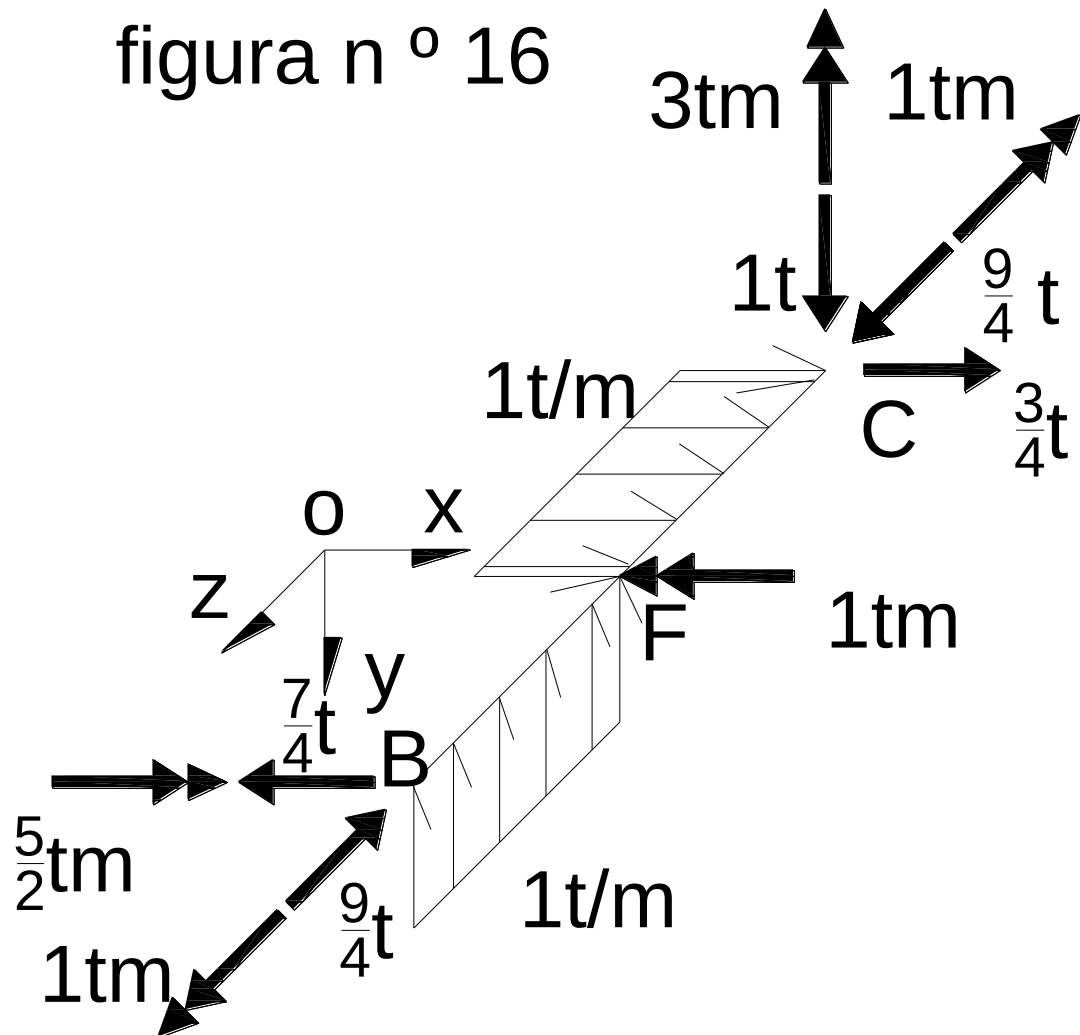
Concluimos la construcción de los diagramas en este tramos con el diagrama de los momentos flectores $M_{(z)}^y$. Se muestra el mismo en la figura n ° 15-2.

figura n ° 15-2



Continuamos analizando el tramo BC. En la figura n ° 16 se muestran las solicitaciones actuantes en dicho tramo, así como las reducciones de la parte izquierda en el nodo B, y de la parte derecha en el nodo C.

figura n ° 16



A continuación, analizamos los esfuerzos característicos en el tramo en estudio.

Comenzamos con $Q_{(z)}^x$, se tiene, en B,

$$(11) \left\{ q_{(z)}^x = 0 \rightarrow \frac{dQ_{(z)}^x}{dz} = 0 \rightarrow Q_{(z)}^x = \text{cte}, z = 2\text{m} \rightarrow Q_{(z)}^x = -\frac{7}{4}t \right.$$

En F, se tiene,

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} q_{(z)}^x = 1 \frac{t}{m} ; \quad Q_{(z)}^x = -\frac{7}{4} t \\ \text{determinación de } a(\text{cm}) \\ a(\text{cm}) = -\frac{1 \frac{t}{m} \cdot 1m}{1 \frac{t}{cm}} = -1cm \end{array} \right.$$

Luego, en la sección **C**, resulta $Q_{(z)}^x = -\frac{3}{4} t$

Continuamos con $M_{(z)}^y$, en **B**, se tiene,

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} M_{(z)}^y = 0 ; \quad Q_{(z)}^x = -\frac{7}{4} t \\ \text{determinación de } a(\text{cm}) \\ a(\text{cm}) = \frac{-\frac{7}{4} t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = -\frac{7}{4} cm \end{array} \right.$$

Luego, como $Q_{(z)}^x$ es constante hasta **F**, entonces el momento $M_{(z)}^y$ es una función lineal. A continuación, determinamos las magnitudes **a(cm)** en las secciones **F** y **C**, donde, la función $Q_{(z)}^x$ es lineal, por consiguiente, $M_{(z)}^y$ es una función cuadrática.

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{en F, } Q_{(z)}^x = -\frac{7}{4} t ; \quad M_{(z)}^y = \frac{7}{4} t \cdot 1m = \frac{7}{4} tm \rightarrow a(\text{cm}) = \frac{-\frac{7}{4} t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = -\frac{7}{4} cm \\ \text{en C, } Q_{(z)}^x = -\frac{3}{4} t ; \quad M_{(z)}^y = 3tm ; \quad a(\text{cm}) = \frac{-\frac{3}{4} t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = -\frac{3}{4} cm \end{array} \right.$$

Continuamos con el esfuerzo $Q_{(z)}^y$. En **B**, se tiene,

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} q_{(z)}^y = -1 \frac{t}{m} ; Q_{(z)}^y = 0, \text{ determinación de } a(\text{cm}) \\ a(\text{cm}) = - \frac{-1 \frac{t}{m} \cdot 1m}{\frac{1t}{cm}} = 1cm \end{array} \right.$$

29

En **F** se tiene,

$$(16) \left\{ q_{(z)}^y = 0 ; \rightarrow Q_{(z)}^y = \text{cte.} \rightarrow z = 1m ; \rightarrow Q_{(z)}^y = -1 \frac{t}{m} \cdot 1m = -1t \right.$$

Siguiendo con el momento flector $M_{(z)}^x$, en el tramo **BF**, debido a que $Q_{(z)}^y$ es una función lineal, entonces el momento $M_{(z)}^x$ resulta una función cuadrática, cuyos valores **a(cm)** resultan,

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \text{en B, } Q_{(z)}^y = 0 ; \rightarrow a(\text{cm}) = 0 ; M_{(z)}^x = \frac{5}{2} tm \\ \text{en F, } Q_{(z)}^y = -1t ; a(\text{cm}) = - \frac{-1t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = 1cm ; M_{(z)}^x = \frac{5}{2} tm - 1 \frac{t}{m} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} m = 2tm \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que en **F** actúa un momento $M_{(z)}^x = -1tm$ que se suma al anterior, resultando un esfuerzo final en la sección $M_{(z)}^x = 2tm - 1tm = 1tm$

en la sección **FC**, el esfuerzo $Q_{(z)}^y$ es constante, por consiguiente, $M_{(z)}^x$ resulta una función lineal, en donde,

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \text{en F, } M_{(z)}^x = 1tm ; Q_{(z)}^y = -1t \rightarrow a(\text{cm}) = - \frac{-1t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = 1cm \\ \text{en C, } Q_{(z)}^y = -1t \rightarrow a(\text{cm}) = - \frac{-1t \cdot 1m}{\frac{1tm}{cm}} = 1cm \end{array} \right.$$

Continuando con el esfuerzo normal **N** en el tramo **BC**, en donde,

$$(19) \quad p = 0 \rightarrow \frac{dN}{dz} = 0 ; \rightarrow N = \text{cte.} \rightarrow z = 2m \rightarrow N = -\frac{9}{4} t$$

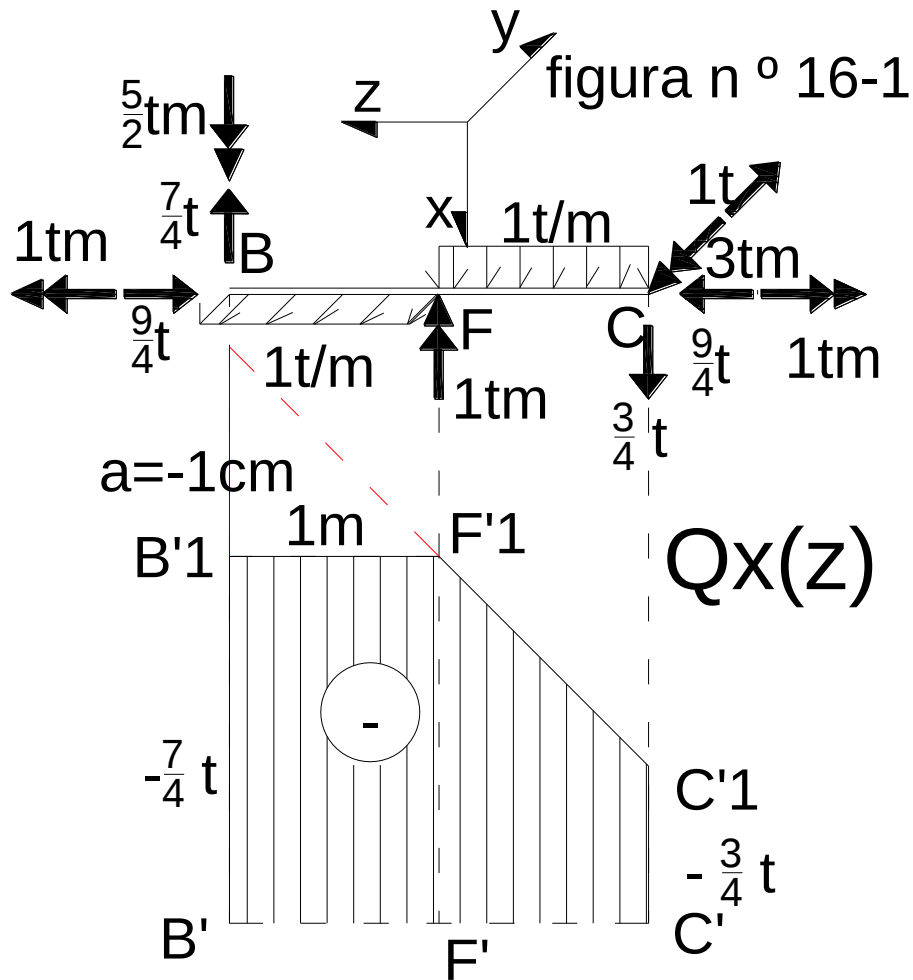
Finalizando el análisis de esfuerzos en el tramo con el diagrama de momentos torsores M_t .

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

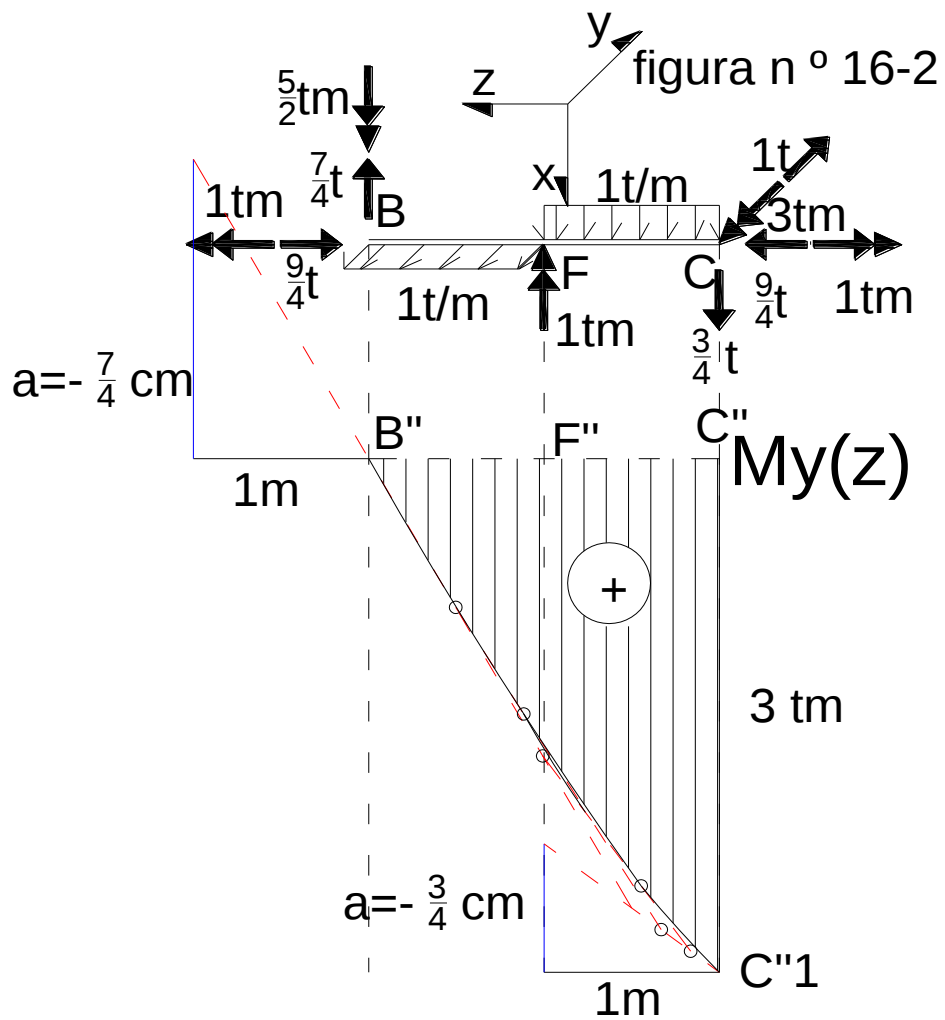
Para el tramo estudiado,

$$(20) \quad M_t = \text{cte} \rightarrow z = 2\text{m}; \quad M_t = 1\text{tm}$$

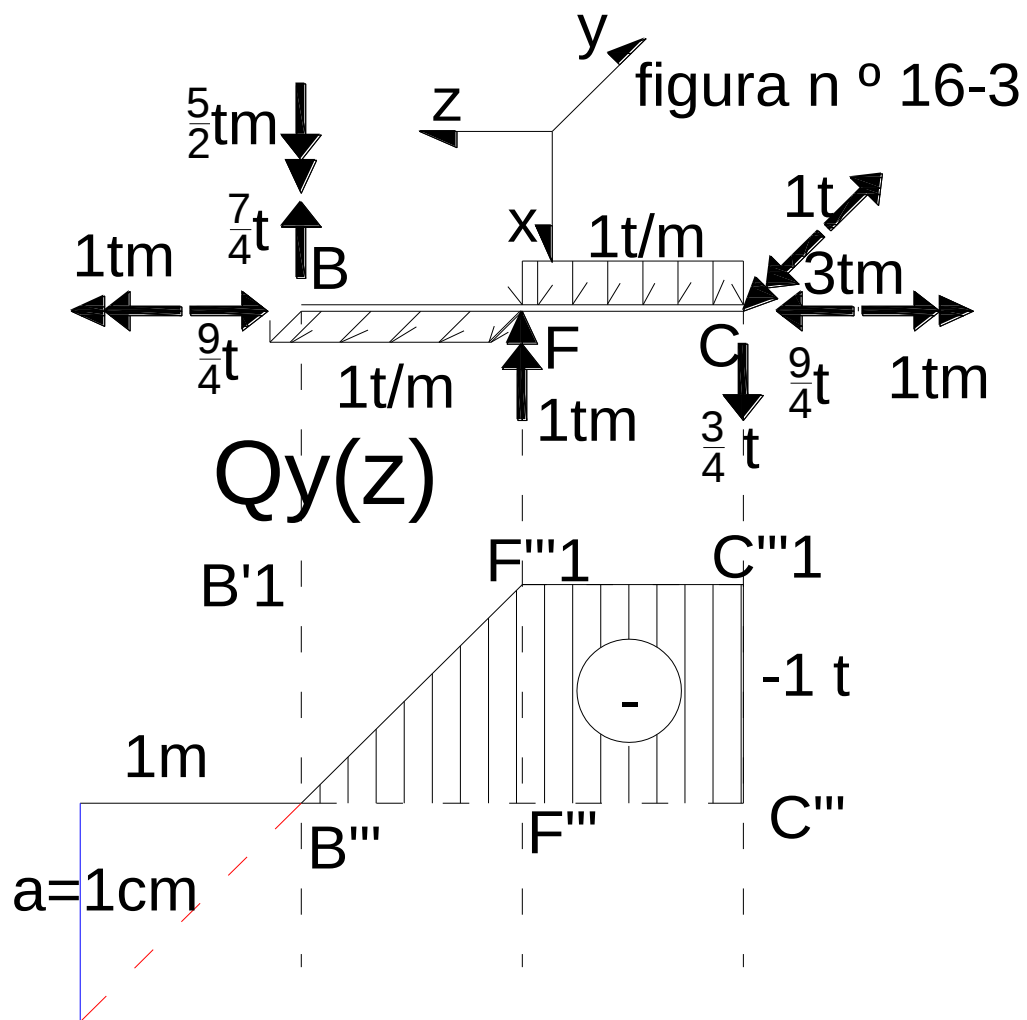
A continuación, se realizan las gráficas de esfuerzos característicos en el tramo BC, comenzando por el diagrama $Q_x(z)$, lo cual se muestra en la figura n° 16-1.



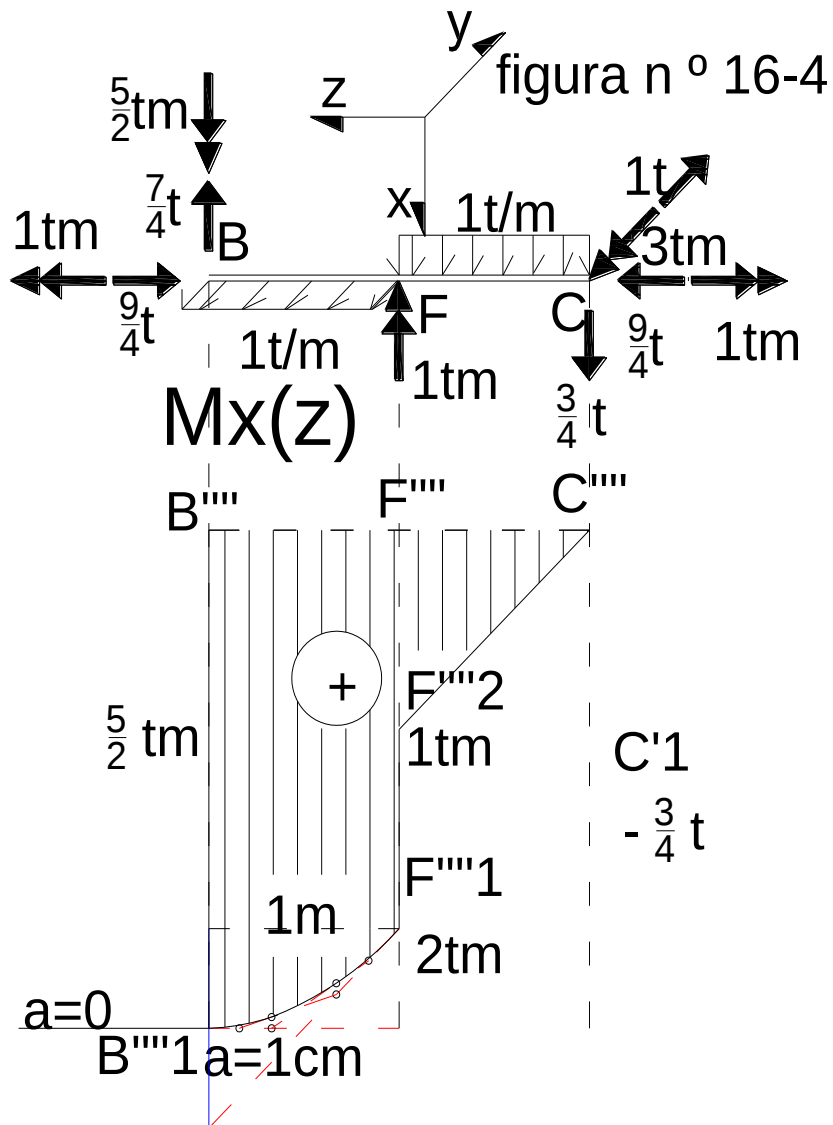
En la figura n° 16-2 se representa el diagrama de momentos $M_y(z)$



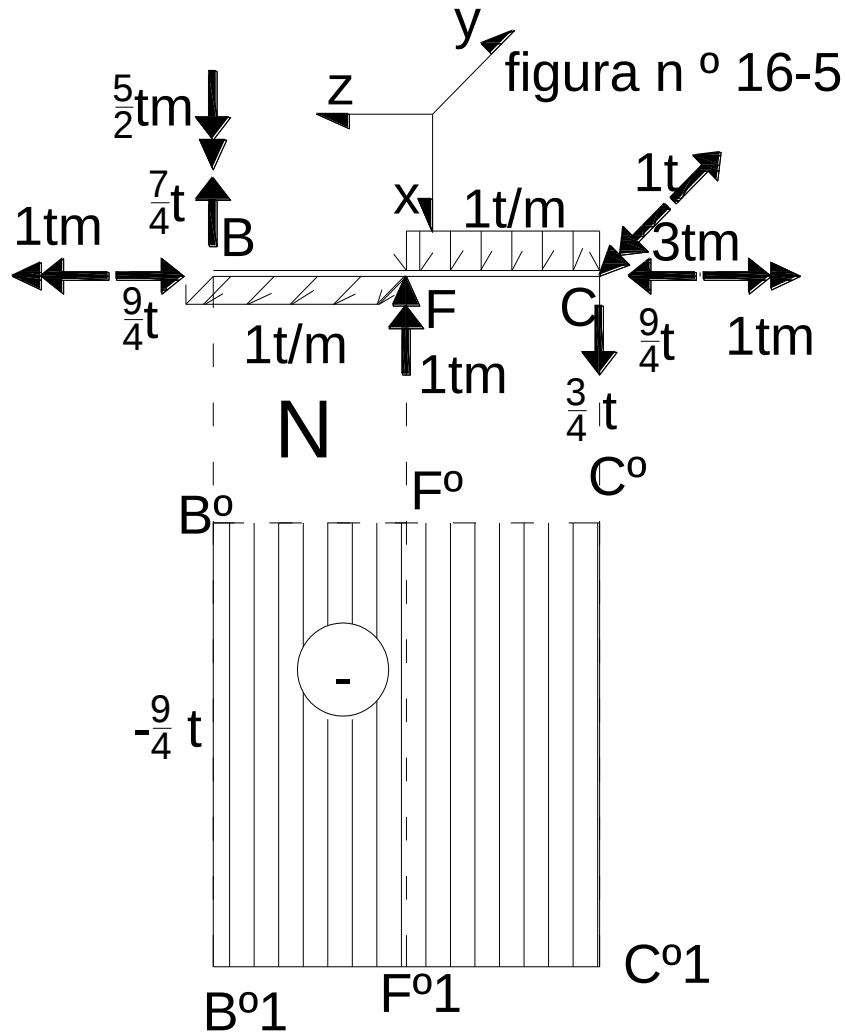
Seguidamente, en la figura n° 16-3 se representa el diagrama de $Q_{(z)}^y$.



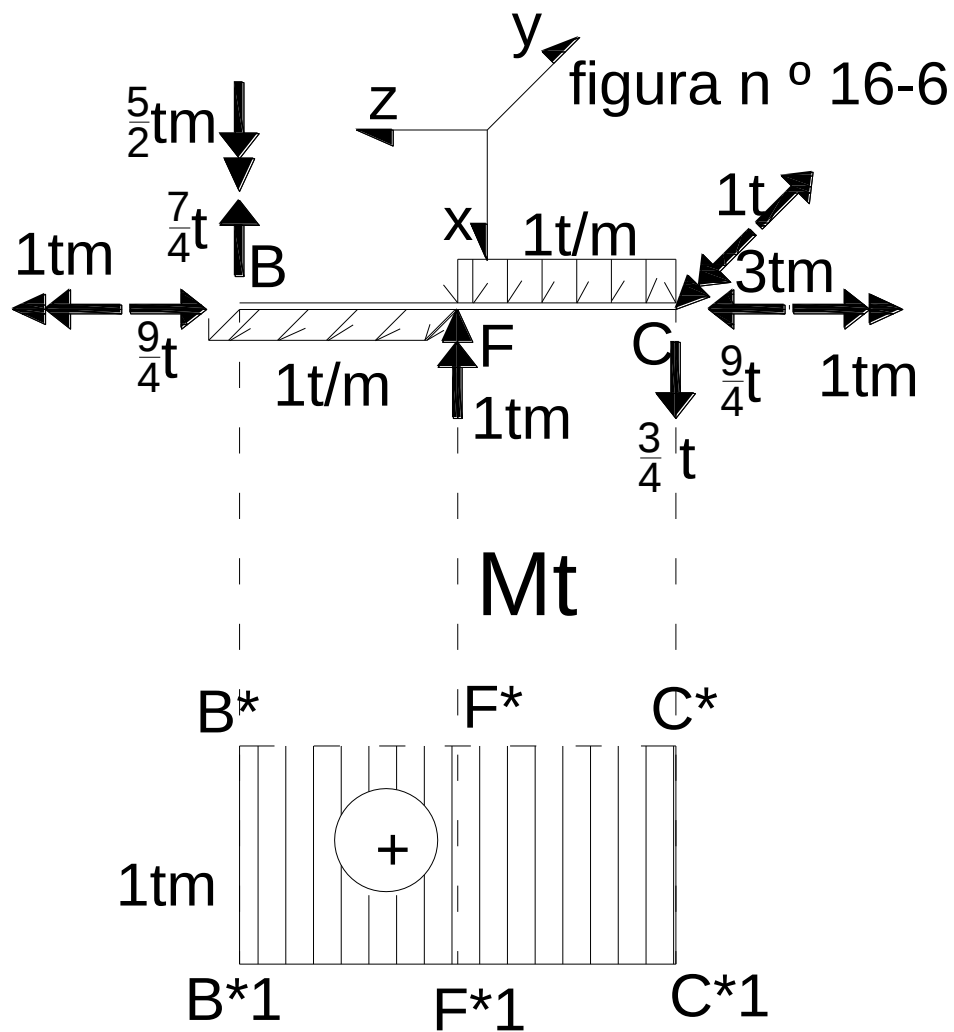
En la figura n ° 16-4 se representa el diagrama $M_{(z)}^x$.



En la figura n° 16-5 mostramos el diagrama de esfuerzos normales **N**.

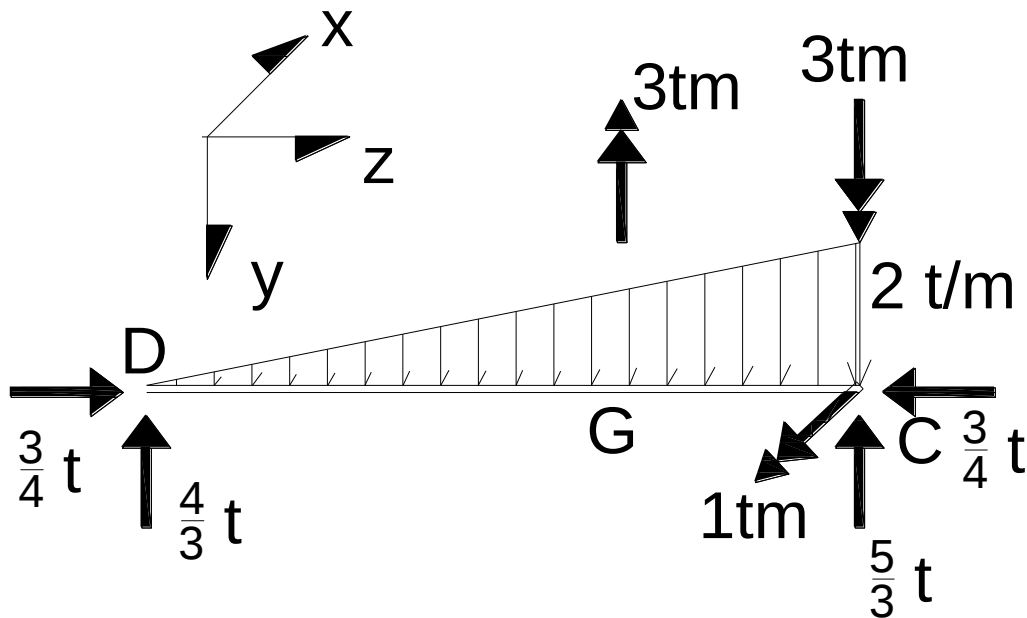


Finalizando la construcción de diagramas en el tramo **BC**, en la figura n ° 16-6 representamos el diagrama M_t .



Continuamos con el análisis del último tramo, **CD**, En la figura n ° 17 se muestra un diagrama de sólido libre del mismo, para lo cual, realizamos la reducción de la parte izquierda (tramo **AC**) en el nodo C.

figura n ° 17



A continuación, analizamos los esfuerzos característicos en el tramo.

Comenzamos por el esfuerzo normal N , para el tramo en cuestión, al no tener carga distribuida en el eje z , se tiene $p = 0$, entonces tenemos,

$$(21) \quad \frac{dN}{dz} = 0 \rightarrow N = \text{cte}, \quad z = 3m, \quad N = -\frac{3}{4}t$$

Continuamos con el análisis del esfuerzo $Q_{(z)}^y$, para el mismo, se tiene que la carga $q_{(z)}^y$ es linealmente repartida, por consiguiente determinamos las magnitudes $a(\text{cm})$ tanto en C , como en D , teniéndose para los mismos,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en } C, Q_{(z)}^y = -\frac{5}{3}t; \quad q_{(z)}^y = 2 \frac{t}{m} \rightarrow a(\text{cm}) = -\frac{2 \frac{t}{m} \cdot 1m}{\frac{1t}{cm}} = -2\text{cm} \\ \text{en } D, Q_{(z)}^y = \frac{4}{3}t; \quad q_{(z)}^y = 0 \rightarrow a(\text{cm}) = 0 \end{array} \right.$$

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

La representación gráfica del $Q_{(z)}^y$ resulta una función cuadrática.

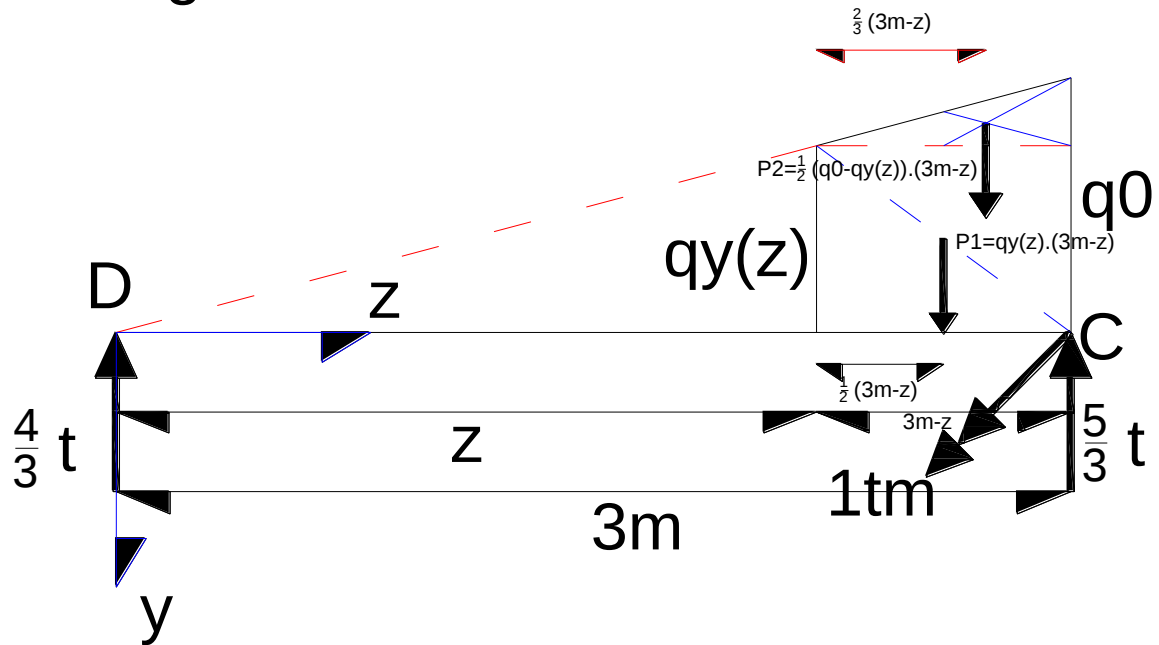
37

Continuando con el momento flector $M_{(z)}^x$, el mismo es una función polinómica de 3º grado, o parábola cúbica. Debemos determinar las magnitudes $a(\text{cm})$ en las secciones C y D, debido a que no existen esfuerzos de discontinuidad en el tramo.

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \text{en C, } M_{(z)}^x = -1tm ; Q_{(z)}^y = -\frac{5}{3}t ; a(\text{cm}) = -\frac{-\frac{5}{3}t \cdot 1m}{\frac{1tm}{\text{cm}}} = \frac{5}{3}\text{cm} \\ \text{en D, } M_{(z)}^x = 0, Q_{(z)}^y = \frac{4}{3}t ; a(\text{cm}) = -\frac{\frac{4}{3}t \cdot 1m}{\frac{1tm}{\text{cm}}} = -\frac{4}{3}\text{cm} \end{array} \right.$$

Luego, la gráfica del diagrama de $M_{(z)}^x$ por el método de las tangentes no informa sobre el máximo valor de este, ni su posición en el tramo, salvo de forma aproximada. Es decir, debemos depender de la precisión del método gráfico, de la escala elegida, del instrumento de medición para medir la ordenada del momento, de la determinación o juicio empleado por la persona que realiza esta medición, etc., lo cual, como observamos, está sujeto a errores de instrumental, de observación, etc., que nos permitiría solo obtener valores, aunque dentro de un rango que pueden ser aceptables, pero subjetivos. Por las razones mencionadas, determinaremos el momento flector máximo, y su posición por el método analítico, para lo cual nos ayudamos con la figura n º 18.

figura n ° 18



Según observamos en la figura n ° 18, considerando una terna local con origen en el punto **D**, y considerando una sección genérica en una abscisa z , y analizando los esfuerzos característicos $Q_{(z)}^y$ y $M_{(z)}^x$, para lo cual reemplazamos la carga trapezoidal mostrada en la figura por una carga uniformemente repartida de intensidad $q_{(z)}^y$, y una carga linealmente repartida de intensidad máxima $q_0 - q_{(z)}^y$. A su vez, es conveniente reemplazar estas cargas repartidas en el tramo en estudio $(3m - z)$ por cargas concentradas P_1 y P_2 de magnitudes,

$$(24) \begin{cases} P_1 = q_{(z)}^y \cdot (3m - z) & \text{en el baricentro } \frac{1}{2}(3m - z) \\ P_2 = \frac{1}{2}(q_0 - q_{(z)}^y)(3m - z) & \text{en el baricentro } \frac{2}{3}(3m - z) \end{cases}$$

respectivamente.

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

Luego, de aquí, deducimos las ecuaciones de esfuerzos cortantes y momentos flectores buscadas. Comenzamos con $Q_{(z)}^y$

39

$$(25) \quad Q_{(z)}^y = -\frac{5}{3}t + \frac{q_0 - q_{(z)}^y}{2}(3m - z) + q_{(z)}^y \cdot (3m - z)$$

Mediante relaciones de triángulos semejantes se puede obtener,

$$(26) \quad \frac{q_0}{q_{(z)}^y} = \frac{3m}{z} \rightarrow q_{(z)}^y = q_0 \frac{z}{3m}$$

Ahora, reemplazando el valor $q_{(z)}^y$ de (26) en (25) resulta,

$$Q_{(z)}^y = -\frac{5}{3}t + q_0 \frac{1 - \frac{z}{3m}}{2}(3m - z) + q_0 \frac{z}{3m}(3m - z) = -\frac{5}{3}t + q_0 \frac{(9m^2 - z^2)}{6m} \quad (27)$$

siendo $q_0 = 2\frac{t}{m}$, la ecuación (27) se puede escribir,

$$Q_{(z)}^y = -\frac{5}{3}t + \frac{1}{3}\frac{t}{m^2}(9m^2 - z^2) \quad (28)$$

Continuamos con la ecuación de momentos flectores $M_{(z)}^x$.

$$M_{(z)}^x = -1tm - \frac{5}{3}t(3m - z) + \frac{q_0 - q_{(z)}^y}{2}(3m - z) \cdot \frac{2}{3}(3m - z) + q_{(z)}^y \cdot \frac{(3m - z)^2}{2} \quad (29)$$

Ahora, reemplazando (26) en (29), y operando algebraicamente, resulta,

$$M_{(z)}^y = -1tm - \frac{5}{3}t(3m - z) + q_0 \frac{(3m - z)^3}{9m} + q_0 \frac{z}{3m} \cdot \frac{(3m - z)^2}{2} \quad (30)$$

También se puede escribir (30) como,

$$M_{(z)}^y = -1tm - \frac{5}{3}t(3m - z) + q_0 \frac{(3m - z)^2}{3m} \left(\frac{3m - z}{3} + \frac{z}{2} \right)$$

$$M_{(z)}^y = -1tm - \frac{5}{3}t(3m - z) + q_0 \frac{(3m - z)^2}{18m} (6m + z) \quad (31)$$

**UTN - FRH. ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. PROBLEMA DESARROLLADO
POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

Por último, reemplazando $q_0 = 2 \frac{t}{m}$ en (31), resulta,

$$M_{(z)}^x = -1tm - \frac{5}{3}t(3m-z) + \frac{1}{9}\frac{t}{m^2}(3m-z)^2(6m+z) \quad (32)$$

El máximo momento flector $M_{(z)}^x$ ocurre cuando el esfuerzo cortante $Q_{(z)}^y$ es nulo.

Igualando a cero la ecuación (28), se obtiene,

$$0 = -\frac{5}{3}t + \frac{1}{3}\frac{t}{m^2}(9m^2 - z^2) \rightarrow z = \pm 2m \quad (33)$$

Al no tener sentido físico la distancia negativa, el máximo momento flector resulta en la abscisa $z = 2m$, y, reemplazando este valor de z en la ecuación (32), se obtiene el máximo valor de momento flector en el tramo.

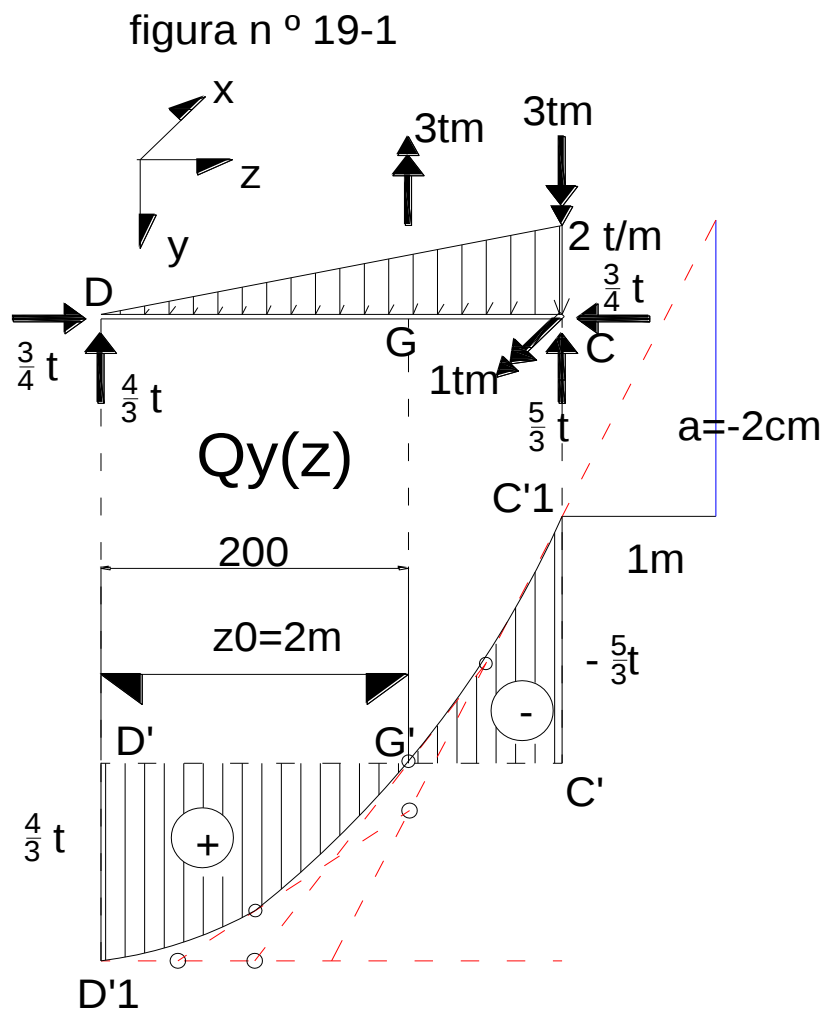
$$M_{(z)\text{-máx}}^y = -1tm - \frac{5}{3}t(3m-2m) + \frac{1}{9}\frac{t}{m^2}(3m-2m)^2(6m+2m) = -\frac{16}{9}tm \quad (34)$$

Según se concluye de (34), el máximo momento flector es negativo, es decir que es un mínimo relativo, pero consideramos máximo en valor absoluto.

Concluimos nuestro análisis con el momento flector $M_{(z)}^y$, para el cual,

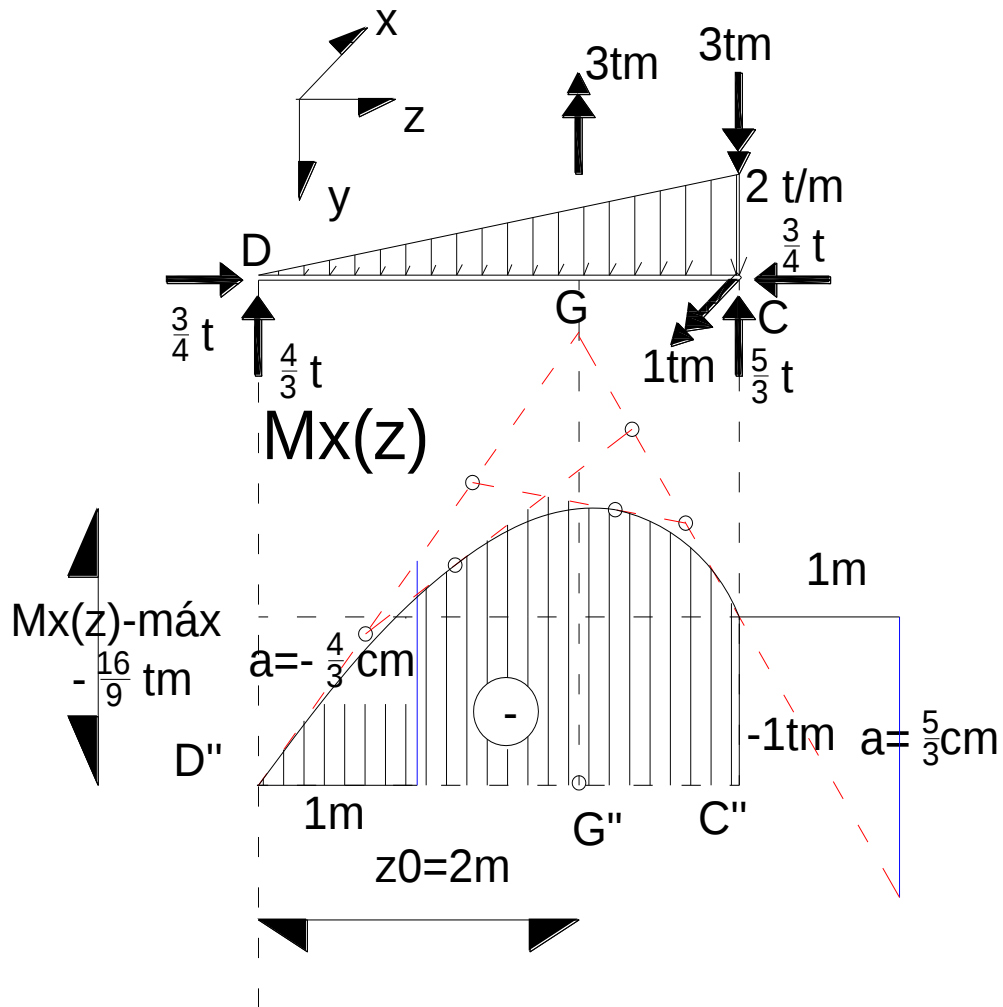
$$(35) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d M_{(z)}^y}{dz} = 0 ; M_{(z)}^y = \text{cte} ; z = 3m , M_{(z)}^y = 3tm \\ z = 2m ; M_{(z)}^y = 0 \end{array} \right.$$

Tenemos ya, todos los datos para construir los diagramas característicos correspondientes en el tramo **CD**, Comenzamos por el diagrama $Q_{(z)}^y$. El mismo se observa en la figura n° 19-1.



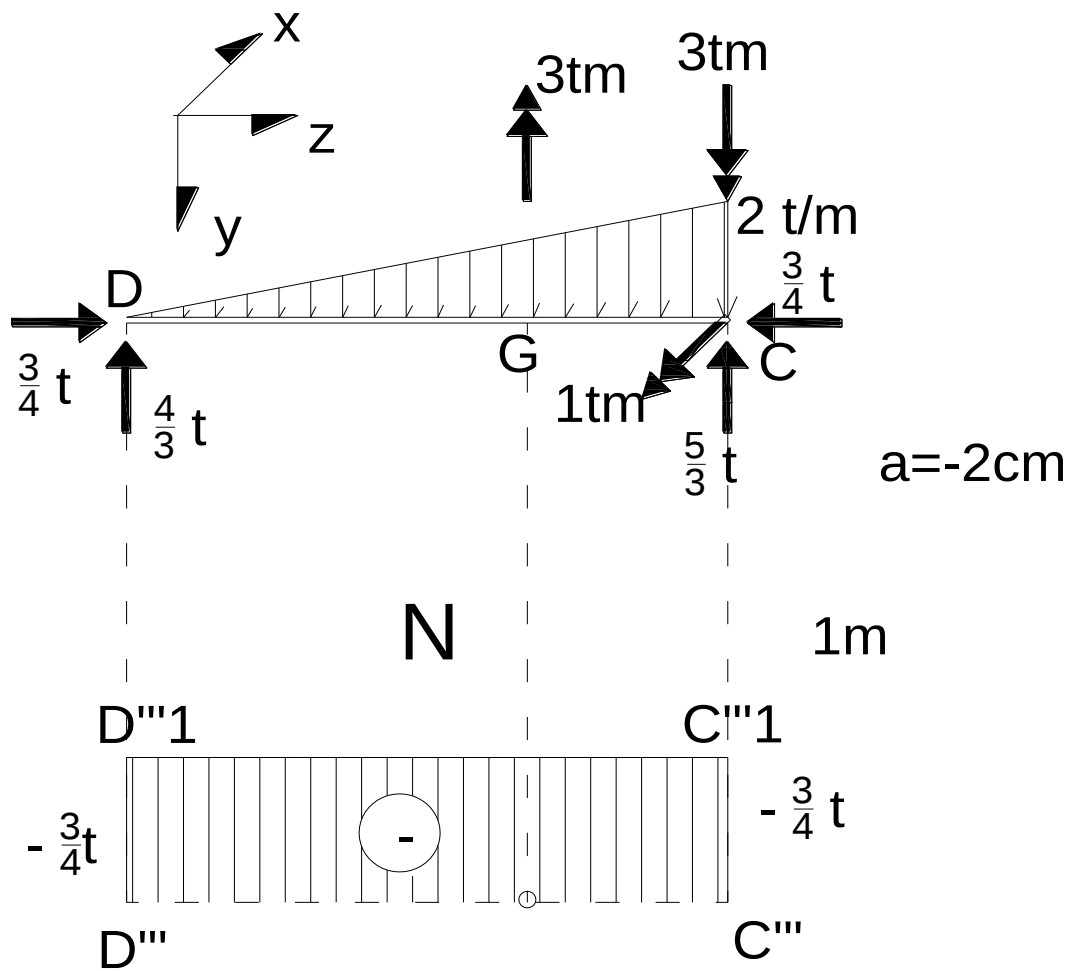
Continuamos con el diagrama de momentos flectores $M_{(z)}^x$ en el tramo CD , lo que se muestra en la figura n ° 19-2.

figura n ° 19-2



A continuación, continuamos con el diagrama de esfuerzos normales N , el mismo se muestra en la figura n ° 19-3.

figura n ° 19-3



Finalizamos nuestro ejercicio, con la gráfica de momentos flectores $M_{(z)}^y$. El mismo se muestra en la figura n ° 19-4.

figura n ° 19-4

