

Unidad 6: Flujo Viscoso Incompresible Interno

Ing. Nahuel Castello

Mecánica de los fluidos - Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad Tecnológica Nacional FRH

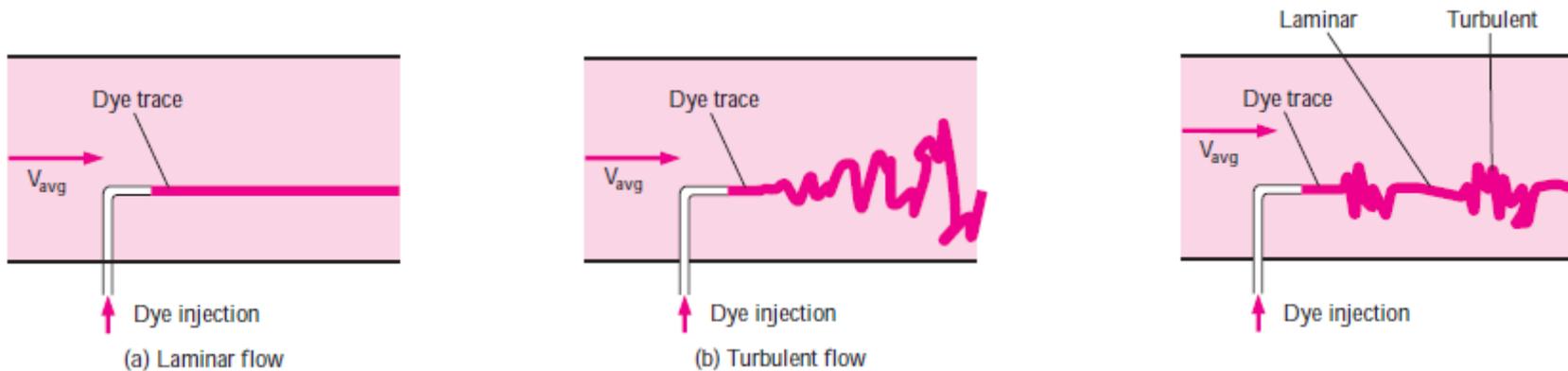
2017

Contenido de La Unidad

- . **Introducción. Dependencia de Reynolds**
- . **Problema de Poiseuille. Experimento de Hagen**
- . **Flujo incompresible viscoso interno (Flujo en cañerías)**
- . **Resistencia específica al movimiento del fluido**
- . **Diámetro hidráulico.**
- . **Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille**
- . **Perdidas de carga en régimen turbulento**
- . **Determinación del factor de fricción . Diagrama de Moody**
- . **Pérdidas en accesorios.**

Introducción

Modelo macroscópico de un fluido introduciendo partículas trazadoras en agua (modelos laminar y turbulento)

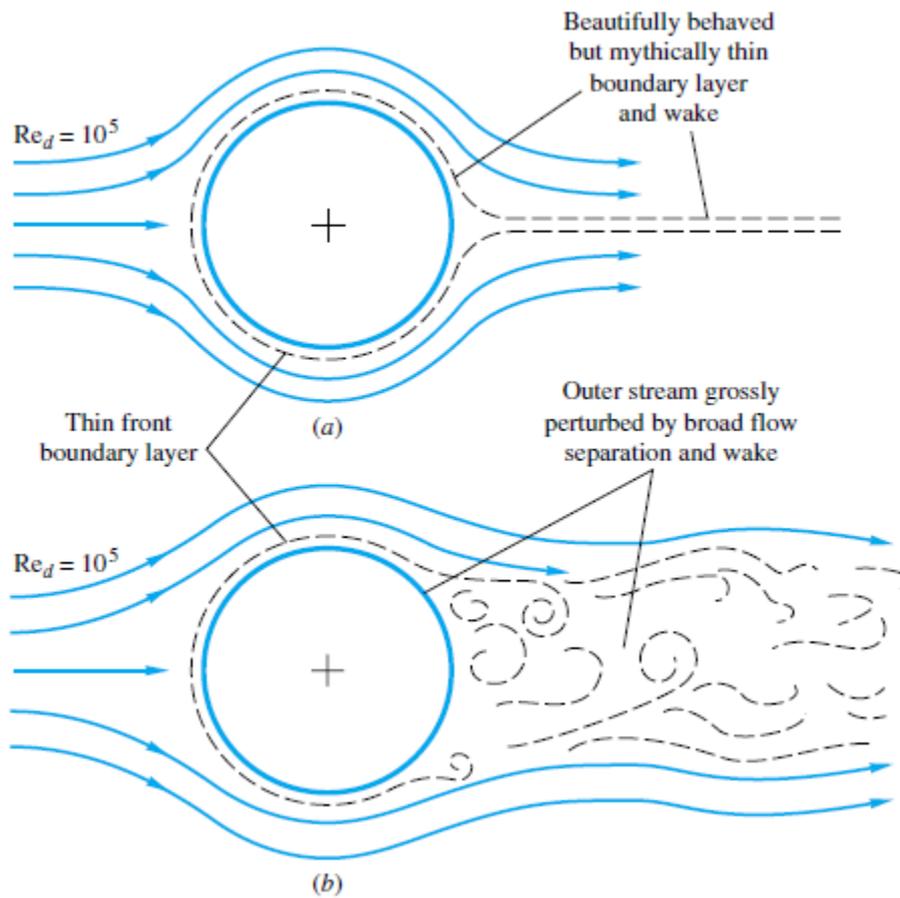


$Re \leq 2300$ laminar flow
 $2300 \leq Re \leq 4000$ transitional flow
 $Re \geq 4000$ turbulent flow

“Valores de Re que definen los regímenes para un fluido, agua (modelos laminar y turbulento)”

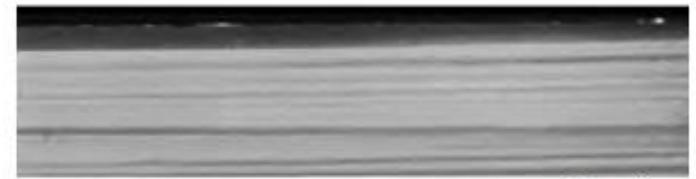
Introducción

Modelo macroscópico de un fluido, aire (modelos laminar y turbulento)

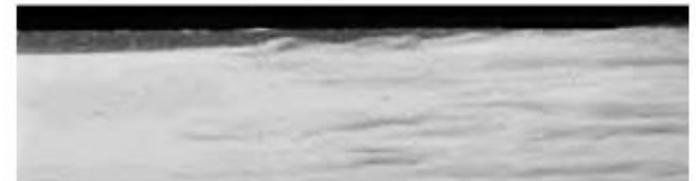


Flujo Externo

Flujo →



Laminar



Transitional

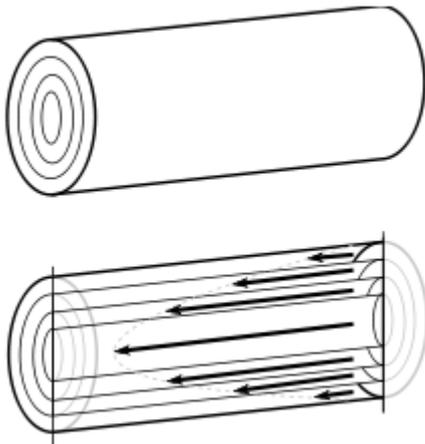


Turbulent

Flujo externo

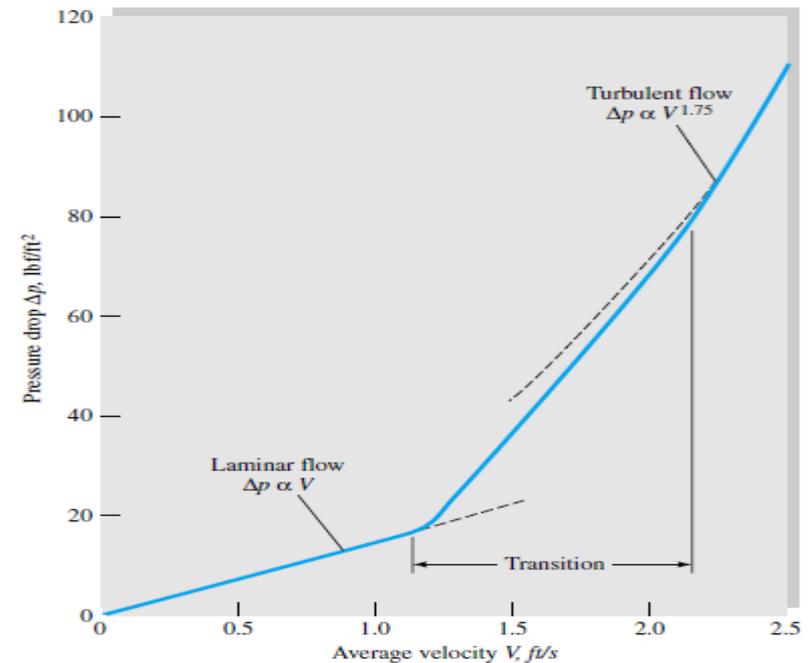
Problema de Poiseuille - Experimento de Hagen

Problema de Poiseuille: El físico francés planteó el problema de un fluido Newtoniano incompresible estacionario que circula por un ducto de sección constante y longitud mucho mayor al diámetro. Observó que existían caídas de presión.



Jean Léonard Marie Poiseuille
(1797 – 1869)

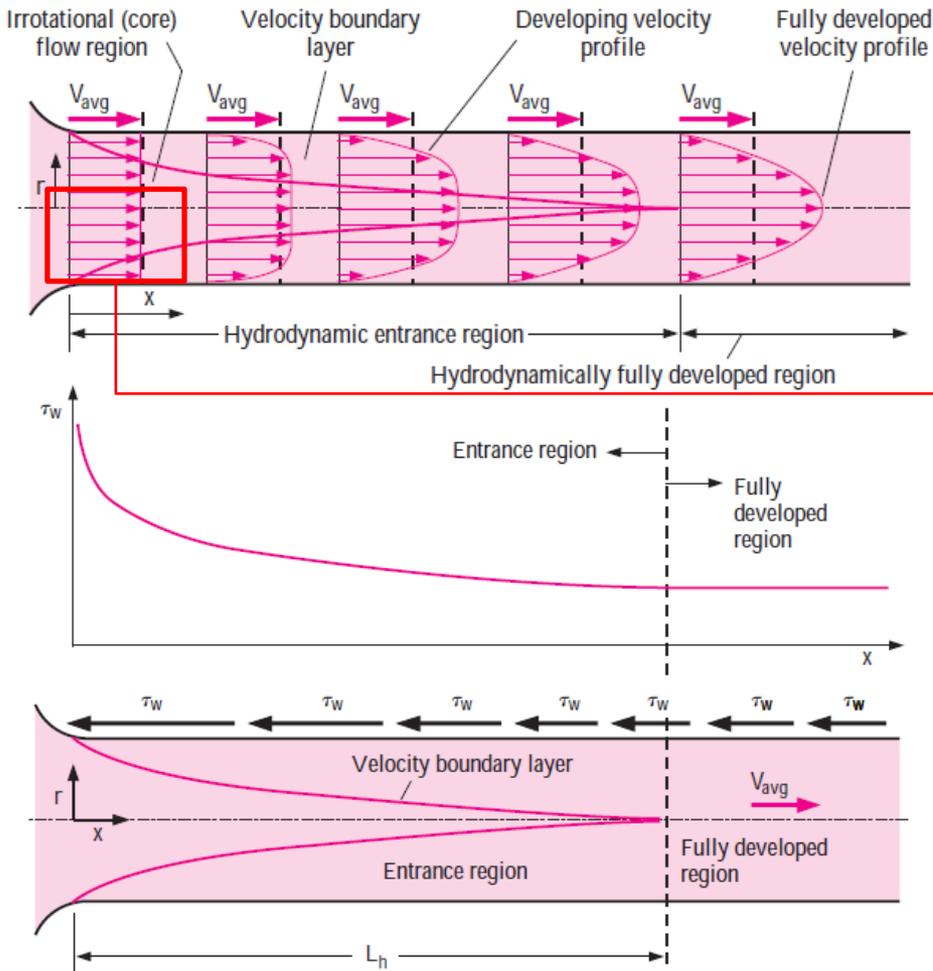
Experimento de Hagen: El físico alemán midió las pérdidas de carga en un fluido Newtoniano incompresible estacionario que circula por un ducto de sección constante y longitud mucho mayor al diámetro.



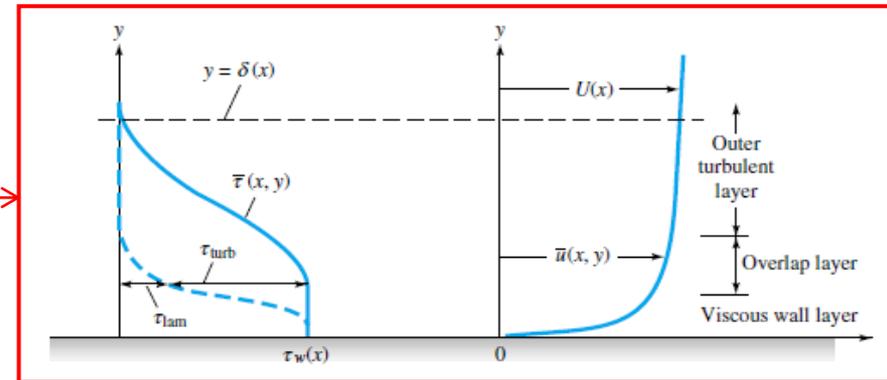
Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen
(1797 – 1884)

Flujo Incompresible Viscoso Interno

Desarrollo del flujo a lo largo del ducto.



Perfil de Tensiones de corte y velocidad para flujo turbulento a lo largo del ducto.



$$L_{h, \text{turbulent}} = 1.359DRe_D^{1/4}$$

$$L_{h, \text{laminar}} \cong 0.05Re_D$$

$$L_{h, \text{turbulent}} \approx 10D$$

Resistencia específica al movimiento del fluido

Hipótesis:

- Flujo incompresible ($Mach < 0,3$)
- Flujo estacionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
- Fluido Newtoniano
- Diámetro del ducto, D , constante
- Caudal volumétrico, Q , constante
- Sea L el largo del ducto, $L \gg D$

Aplicando PCM:

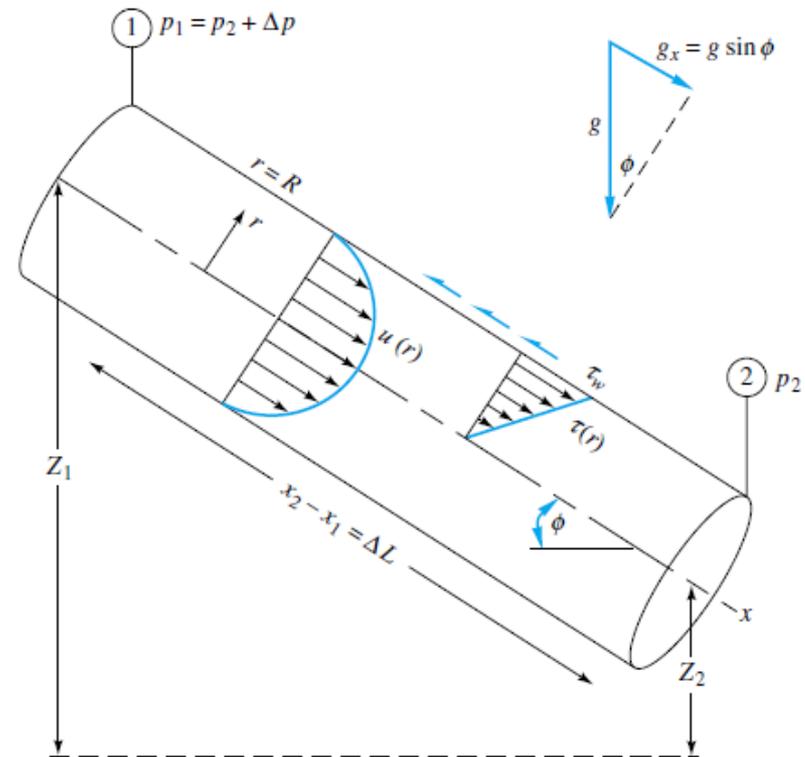
$$Q_1 = Q_2 = \text{const}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = V_2 = \frac{Q_2}{A_2}$$

$$\text{Sen } \phi = \frac{Z_1 - Z_2}{\Delta L}$$

Aplicando PCCM:

$$F_{\text{sup}}(\sigma) - F_{\text{sup}}(\tau) + \text{Peso} - F_{\text{inercia}}(t) - F_{\text{inercia}}(v) = 0$$



Resistencia específica al movimiento del fluido

Aplicando PCCM:

$$F_{sup}(\sigma) - F_{sup}(\tau) + \text{Peso} - \text{Finercia (t)} - \text{Finercia (v)} = 0$$

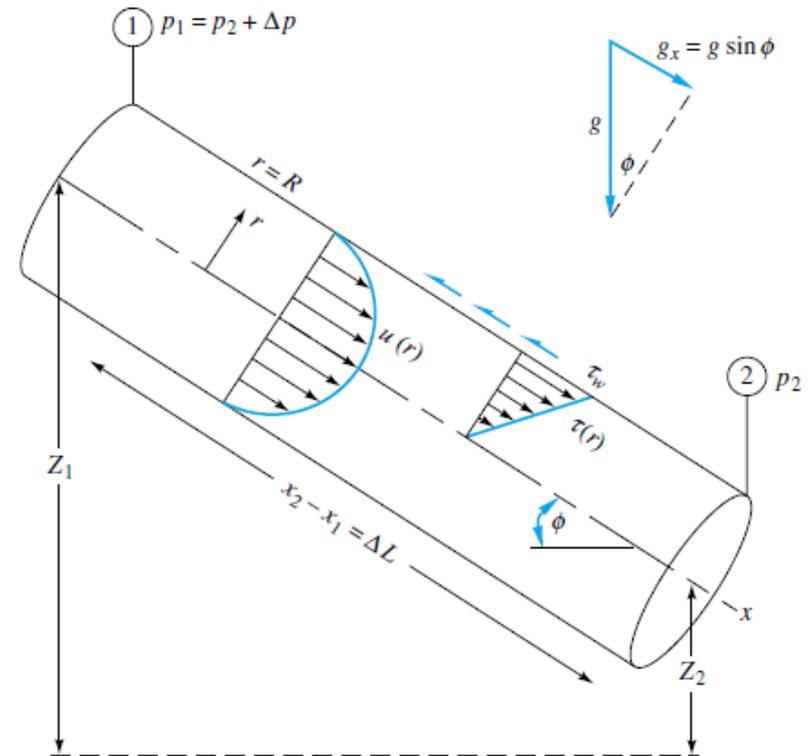
$$F_{sup}(\sigma) = \sum_{i=1}^j \iint_A -P \vec{n} dA$$

$$F_{sup}(\tau) = \overline{R_T}$$

$$\text{Peso} = \rho \vec{g} \text{Vol}$$

$$\text{Finercia(t)} = \iiint_{v.c.} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\text{Vol} = 0$$

$$\text{Finercia}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^j \iint_A \vec{v} dC_\rho = 0$$



Resistencia específica al movimiento del fluido

Aplicando PCCM:

$$F_{sup}(\sigma) - F_{sup}(\tau) + \text{Peso} - \text{Finercia (t)} - \text{Finercia (v)} = 0$$

Planteando en la dirección del ducto:

$$F_{sup}(\sigma) = (P_1 - P_2) A$$

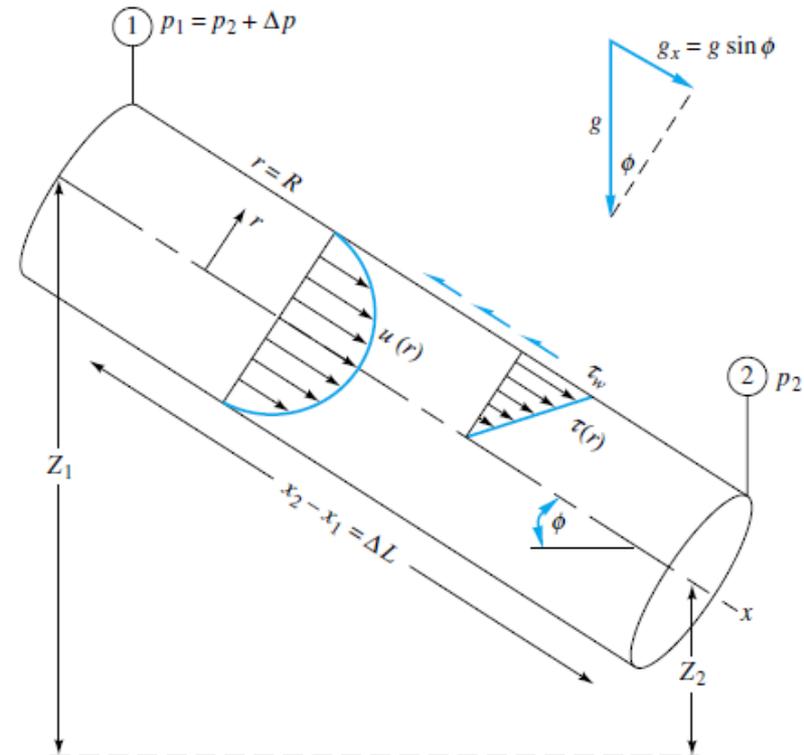
$$F_{sup}(\tau) = \overline{R_T} \quad (\text{Resistencia a la circulación del fluido})$$

$$\text{Peso} = \rho g A \Delta L \text{ Sen } \phi = \gamma A (Z_1 - Z_2)$$

Lo que resulta:

$$R_T = (P_1 - P_2)A + \gamma A (Z_1 - Z_2)$$

$$R_T = A \gamma \left[\left(\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + Z_2 \right) \right]$$



Resistencia específica al movimiento del fluido

$$R_T = A \gamma \left[\left(\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + Z_2 \right) \right]$$

Aplicando P.C.E.:

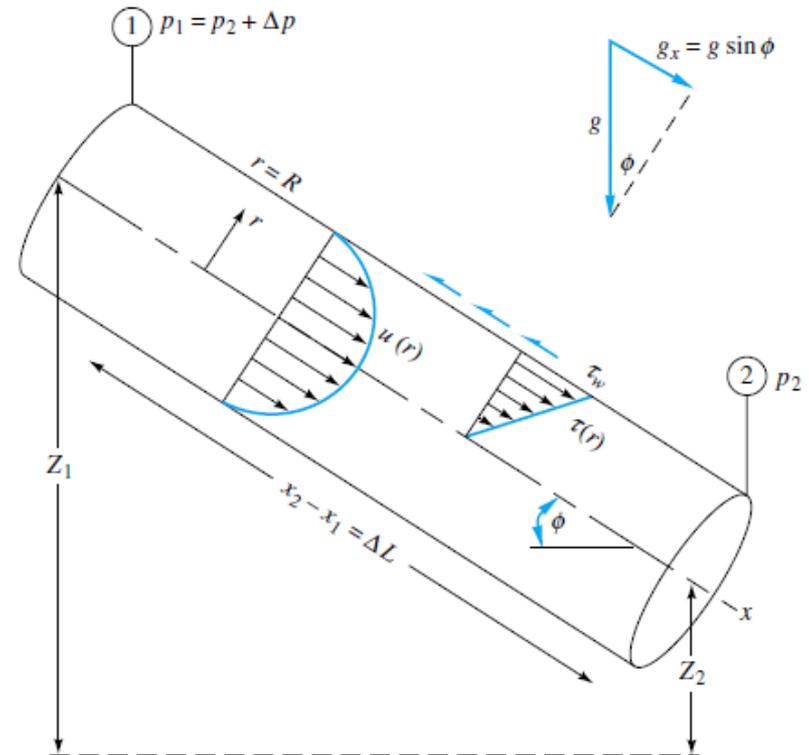
$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{v^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{v^2}{2g} + \Delta h_L$$

$$R_T = A \gamma \Delta h_L$$

Δh_L es la energía específica consumida por la fricción y se conoce como **pérdida de carga (Head Loss)**.

Luego se define pérdida de carga por unidad de longitud, J , como:

$$J = \frac{\Delta h_L}{\Delta L}$$



Resistencia específica al movimiento del fluido

Finalmente:

$$R_T = A \gamma J \Delta L$$

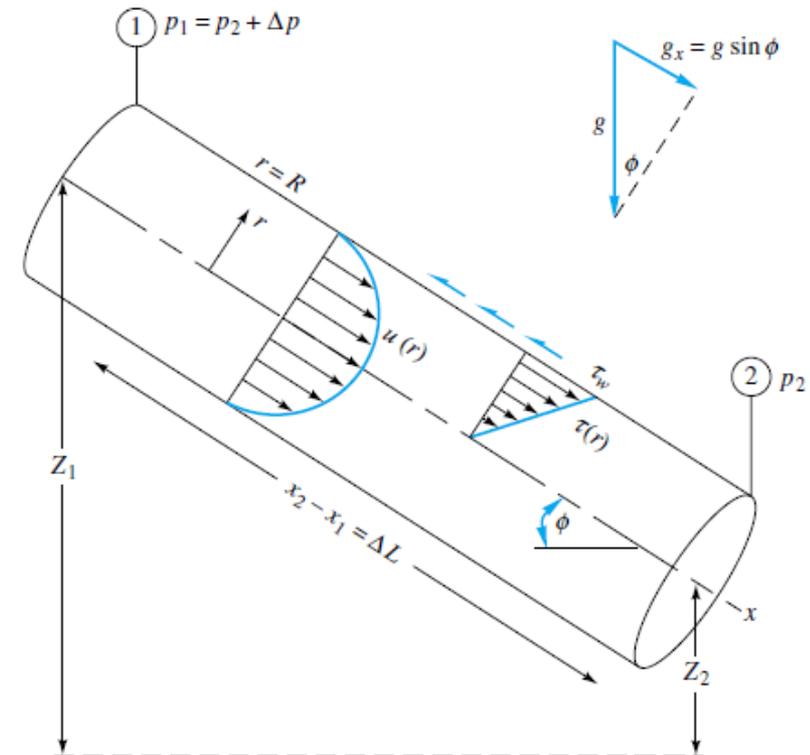
$$R_T = \gamma J Vol$$

$$R_T = J Peso$$

Como se ve, J es la resistencia a la circulación por unidad de peso.

Se define **Resistencia Específica** al cociente entre la resistencia a la circulación total (R_T), sobre el área bañada por el fluido.

$$R_E = \frac{J \text{ Peso}}{A_b}$$



Diámetro Hidráulico

Diámetro hidráulico.

Se define radio hidráulico como el cociente entre la sección del ducto y el perímetro mojado (P_w).

$$R_h = \frac{A}{P_w}$$

El perímetro mojado es el perímetro de la sección en contacto con el fluido . Así el área mojada será:

$$A_b = P_w \Delta L = \frac{A \Delta L}{R_h}$$

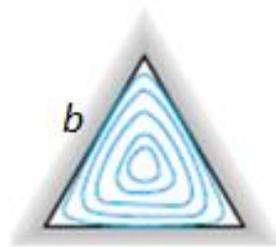
Se define diámetro hidráulico como:

$$D_h = \frac{4A}{P_w} \longrightarrow A_b = \frac{4A \Delta L}{D_h}$$

Diámetro Hidráulico

Diámetro hidráulico – Casos Típicos

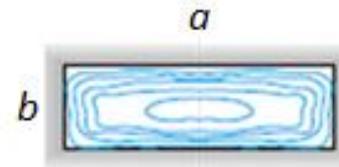
$$D_h = \frac{4A}{P_w} \longrightarrow A_b = \frac{4A \Delta L}{D_h}$$



$$D_h = \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

$$A_b = 3b \Delta L$$

$$R_E = \frac{A \gamma J \Delta L}{A_b}$$



$$D_h = \frac{2ab}{a+b}$$

$$A_b = 2(a+b) \Delta L$$

$$R_E = \frac{\gamma J a b}{2(a+b)}$$



$$D_h = 2r$$

$$A_b = 2\pi r \Delta L$$

$$R_E = \frac{J \gamma r}{2}$$

$$D_h = 4R_h = \frac{4A}{P_w}$$

$$A_b = \frac{A \Delta L}{R_h} = \frac{4A \Delta L}{D_h}$$

$$R_E = J \gamma R_h = \frac{J \gamma D_h}{4}$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Flujo de Hagen- Poiseuille

Pérdidas de carga y caudal en régimen laminar (Ecuaciones de Darcy - Hagen)

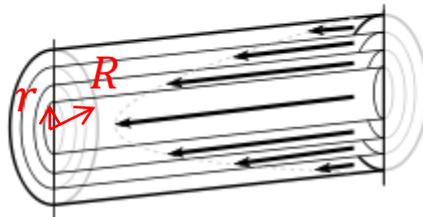
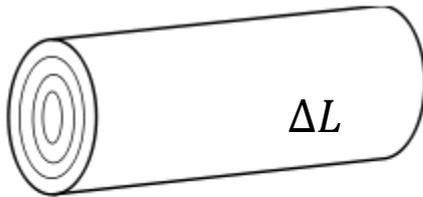
Hipótesis:

- Flujo en un ducto de sección constante.
- Infinitos cilindros coaxiales moviéndose uno dentro del otro.
- Los cilindros son independientes, no intercambian partículas.
- La velocidad es pequeña, el diámetro es pequeño y la viscosidad es elevada (Bajo Reynolds).

- Flujo de Hagen - Poiseuille
 - Relación entre la velocidad máxima y velocidad media
 - Ecuación de Darcy
 - Ecuación de Poiseuille

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Flujo laminar de Hagen - Poiseuille



$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\mu \frac{du}{dr}$$

$$R_T = A \gamma J \Delta L = \pi r^2 \gamma J \Delta L$$

$$u = u(r)$$

$$R_T = \tau A_b = \tau 2\pi r \Delta L$$

$$R_T = \tau A_b = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r \Delta L$$

$$\pi r^2 \gamma J \Delta L = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r \Delta L$$

$$du = -\frac{\gamma J}{\mu 2} r dr$$

$$\int_{u=u}^{u=0} du = -\frac{\gamma J}{\mu 2} \int_{r=R}^{r=0} r dr$$

"Perfil de Velocidad en cañería de sección circular"

$$u(r) = \frac{\gamma R^2 J}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$u(r)$ es máxima en $r = 0$

"Velocidad Maxima"

$$u_{max} = \frac{\gamma R^2 J}{4\mu}$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

$$C\rho = \rho u_{avg} A = \int_{r=0}^{r=R} \rho u(r) dA$$

$$C\rho = \rho u_{avg} A = \int_{r=0}^{r=R} \rho u(r) 2\pi r dr$$

$$\rho u_{avg} A = \int_{r=0}^{r=R} \rho \frac{\gamma J R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr$$

$$u_{avg} = \frac{\int_{r=0}^{r=R} \rho \frac{\gamma J R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr}{\rho A}$$

$$u_{avg} = \frac{\int_{r=0}^{r=R} \rho \frac{\gamma J R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2}$$

$$u_{avg} = \frac{\int_{r=0}^{r=R} \rho \frac{\gamma J R^2}{4\mu} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) 2\pi dr}{\rho \pi R^2}$$

$$u_{avg} = \frac{\rho \frac{\gamma J R^2}{4\mu} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) 2\pi}{\rho \pi R^2}$$

"Velocidad Promedio"

$$u_{avg} = \frac{\gamma J R^2}{8\mu}$$

"Velocidad Maxima"

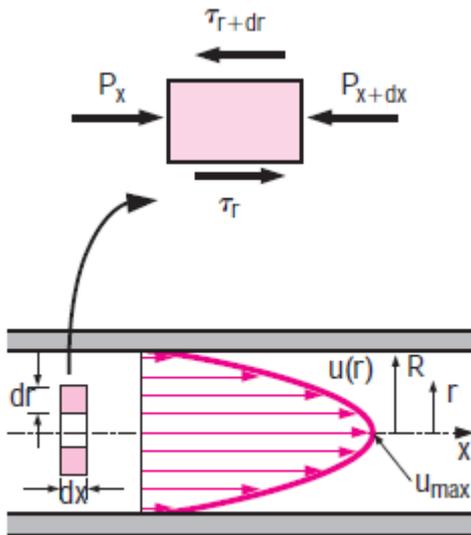
$$u_{max} = \frac{\gamma R^2}{4\mu} J$$

$$u_{max} = 2 u_{avg}$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Perfil de velocidad para flujo Laminar en cañerías de sección circular - Análisis Diferencial

Diagrama de Cuerpo Libre sobre un anillo diferencial coaxial



$$(2\pi r \, dr \, P)_x - (2\pi r \, dr \, P)_{x+dx} + (2\pi r \, dx \, \tau)_r - (2\pi r \, dx \, \tau)_{r+dr} = 0$$

$$r \frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0$$

$$dr, dx \rightarrow 0$$

$$r \frac{dP}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0$$

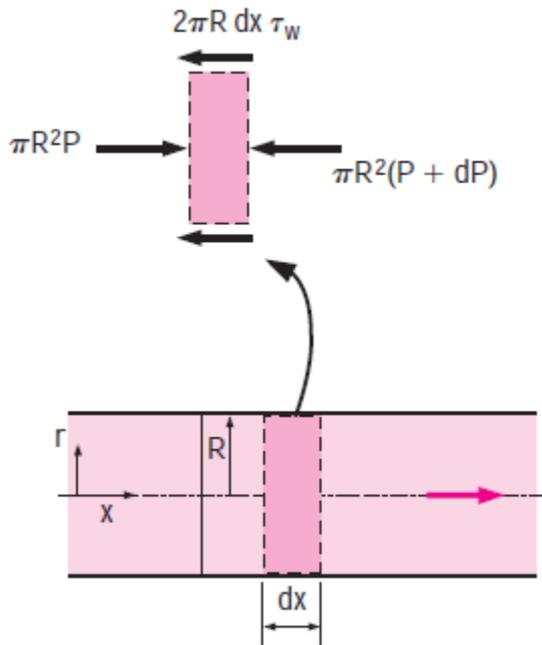
$$\begin{cases} \tau = -\mu(du/dr) \\ \mu = \text{constant} \end{cases} \left\{ \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \right.$$

"τ es negativa por que el gradiente de velocidad es negativo, se despreciara este signo de manera de obtener valores + de τ"

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Perfil de velocidad para flujo Laminar en cañerías de sección circular - Análisis Diferencial

Diagrama de Cuerpo Libre sobre un disco coaxial de espesor diferencial



$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

"Debido que para una region de fluido completamente desarrollado el perfil de Velocidad es constante, τ es constante, y esto implica que: "

$$dP/dx = \text{constant.}$$

Debemos integrar dos veces la expresión:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx}$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Perfil de velocidad para flujo Laminar en cañerías de sección circular - Análisis Diferencial

Integrando dos veces $\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \longrightarrow \int d \left(r \frac{du}{dr} \right) = \int \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{r}{\mu} dr$

$$\frac{du}{dr} = 0, r = 0 \rightarrow C1 = 0 \quad r \frac{du}{dr} = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{r^2}{2\mu} + C1$$

$$r \frac{du}{dr} = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{r^2}{2\mu}$$

$$\int du = \left(\frac{dP}{dx} \right) \int \frac{r}{2\mu} dr$$

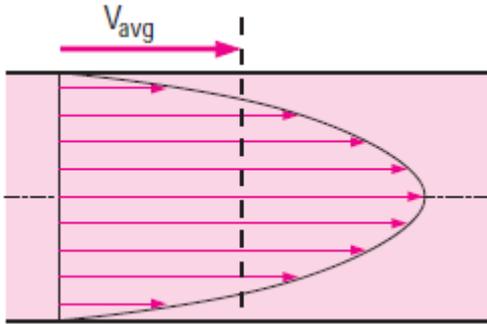
$$u = 0, r = R \rightarrow C2 = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \quad u = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{r^2}{4\mu} + C2$$

"Perfil de Velocidad en cañería de seccion circular"

$$u(r) = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Perfil de velocidad para flujo Laminar en cañerías de sección circular - Análisis Diferencial



"La expresion de velocidad media esta dada por el Principio de conservacion de la Masa"

$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c = \int_{A_c} \rho u(r) dA_c$$
$$V_{avg} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr$$

$$u(r) = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

"Velocidad Promedio en cañeria de seccion circular"

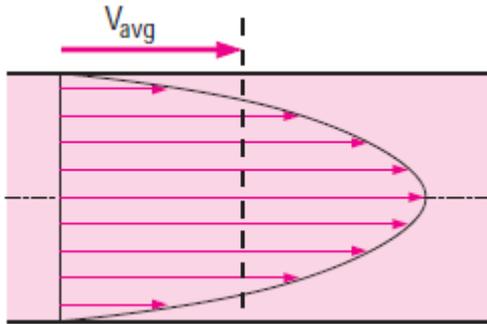
$$V_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = \frac{-2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = \boxed{-\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right)}$$

$$u(r) = 2V_{avg} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad u_{max} = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \quad "u(r) \text{ es máxima en } r = 0"$$

"Relacion entre velocidad maxima y Velocidad Promedio"

$$\boxed{u_{max} = 2V_{avg}}$$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille



Ecuación de Darcy

$$V_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r)r dr = \frac{-2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dP}{dx}\right)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L}$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{avg}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{avg}}{D^2}$$

Es conveniente expresar la caída de presión en términos de la longitud, diámetro y presión dinámica como:

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{avg}^2}{2}$$

Donde el factor f recibe el nombre de "Factor de Fricción de Darcy":

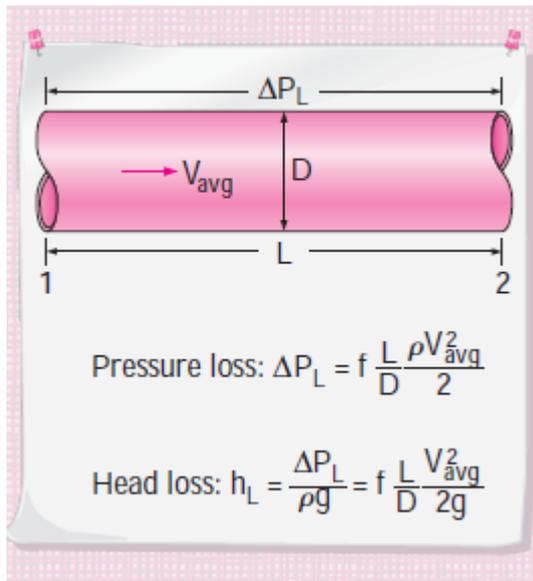
$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{avg}^2}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{avg}^2}{2g}$$

"Ecuación de Darcy"

$$f = \frac{64\mu}{\rho D V_{avg}} = \frac{64}{Re}$$

"Factor de Fricción de Darcy Flujo Laminar"



Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Ecuación de Poiseuille

Se vio que la Velocidad Promedio en cañería de seccion circular es igual a:

$$V_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r)r dr = \frac{-2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r dr = \boxed{-\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dP}{dx}\right)}$$

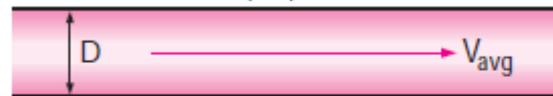
La potencia de bombeo requerida para vencer la perdida de carga esta dada por: $\dot{W}_{pump,L} = \dot{V} \Delta P_L = \dot{V} \rho g h_L = \dot{m} g h_L$

$$V_{avg} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

"Ecuacion de Poiseuille"

$$\dot{V} = V_{avg} A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \boxed{\frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L}}$$

$$\dot{W}_{pump} = 16 \text{ hp}$$



$$\dot{W}_{pump} = 1 \text{ hp}$$

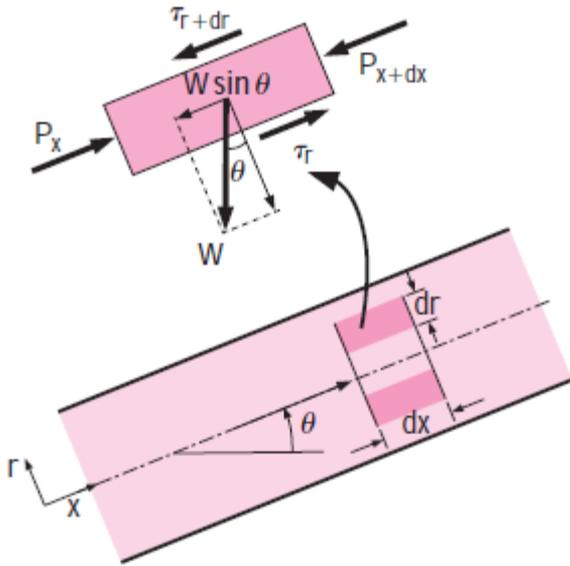


$$\Delta P = \frac{128\mu L \dot{V}}{\pi D^4}$$

"Se hace notar que **duplicar** el diametro de la caneria, conlleva **disminuir 16 veces** La potencia de bombeo necesaria para vencer la **perdida de carga** "

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

Ecuación de Poiseuille



$$V_{avg} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) D^2}{32 \mu L}$$

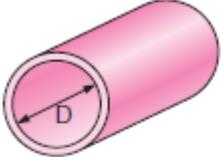
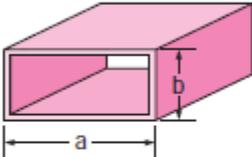
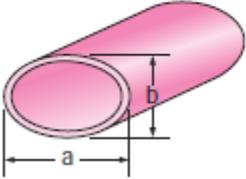
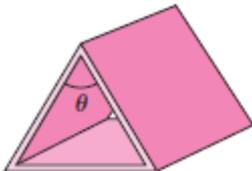
"Ecuación de Poiseuille para tuberías inclinadas"

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) \pi D^4}{128 \mu L}$$

Para valores de $\theta +$, $\sin \theta > 0$
Para valores de $\theta -$, $\sin \theta < 0$

Pérdidas de carga, caudal, velocidad media, máxima y perfil de velocidad en régimen laminar. Flujo de Hagen- Poiseuille

$$f = \frac{64\mu}{\rho DV_{avg}} = \frac{64}{Re}$$

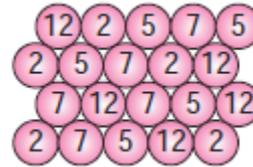
Tube Geometry	a/b or θ°	Friction Factor f
Circle 	—	64.00/Re
Rectangle 	a/b	
	1	56.92/Re
	2	62.20/Re
	3	68.36/Re
	4	72.92/Re
	6	78.80/Re
	8	82.32/Re
	∞	96.00/Re
Ellipse 	a/b	
	1	64.00/Re
	2	67.28/Re
	4	72.96/Re
	8	76.60/Re
	16	78.16/Re
Isosceles triangle 	θ	
	10°	50.80/Re
	30°	52.28/Re
	60°	53.32/Re
	90°	52.60/Re
	120°	50.96/Re

Perdida de Carga en Régimen Turbulento

“No existe un modelo físico que estudie en forma completa los casos de flujo turbulento”

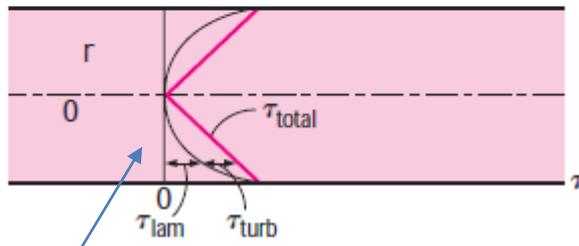
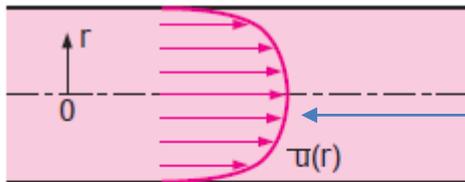


a) Antes de la Turbulencia

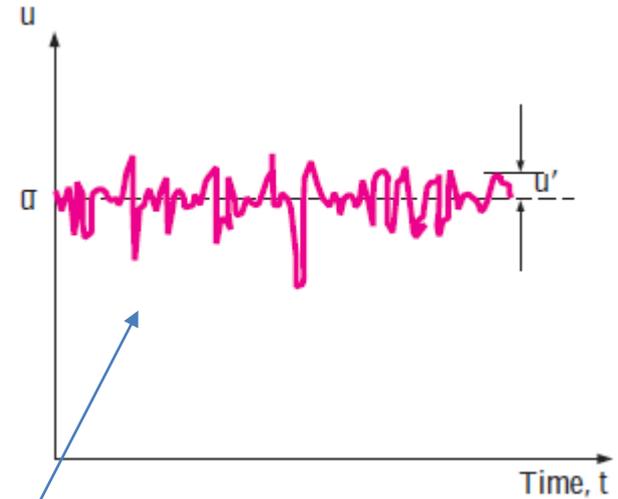


b) Después de la Turbulencia

“El perfil de velocidad es mas plano en el centro que en flujo laminar, y con un elevado gradiente cerca de la pared”



$$\tau_{total} = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$



$$u = \bar{u} + u'$$

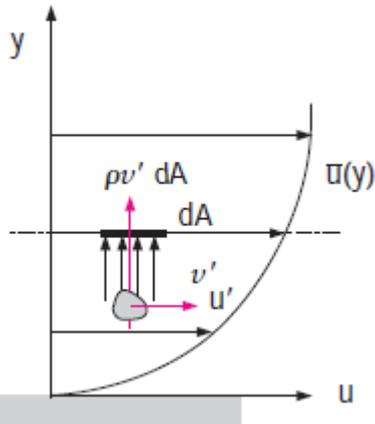
Fluctuaciones a lo largo del tiempo de la velocidad instantánea en flujo turbulento.

En la figura se ve como la velocidad fluctúa alrededor de la velocidad promedio. Lo mismo sucede con otras propiedades termodinámicas como la presión y la temperatura.

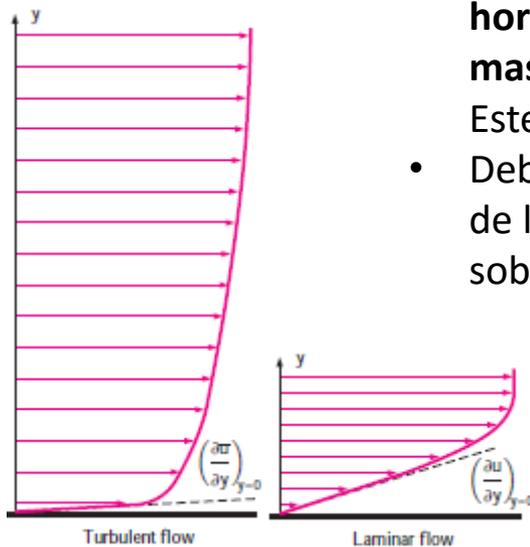
$$v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p' \quad T = \bar{T} + T'$$

“Por acción de las fluctuaciones de la velocidad, **las tensiones de corte en flujo turbulento son mayores que en laminar**. Estas se descomponen en las tensiones de corte debido a la fricción en la dirección del flujo producto de la suma de la componente de flujo laminar, mas la componente de flujo turbulento”

Perdida de Carga en Régimen Turbulento



- Considere el **movimiento ascendente en remolino** de partículas de una **capa de velocidad inferior a una de velocidad superior** a través de un área diferencial dA como consecuencia de la fluctuación de velocidad vertical v' .
- El **caudal másico de ascenso** a través de dA es $\rho v' d\bar{A}$
- Como consecuencia de este caudal másico ascendente, hay **una tasa de transferencia de cantidad de movimiento en la dirección horizontal** $(\rho v' dA)u'$ de la **capa con menor velocidad horizontal (inferior)** a la **capa dA (superior)**, con mayor velocidad horizontal.
- Esta transferencia de cantidad de movimiento **reduce la velocidad horizontal de la capa dA** , debido a que la **velocidad de la capa de abajo es mas lenta, e incrementa la velocidad horizontal de la capa de abajo en u'** . Este incremento varia con una razón de $(\rho v' dA)u'$
- Debido a que la fuerza en una dirección dada es igual a la tasa de cambio de la cantidad de movimiento en esa dirección, la fuerza de corte que actúa sobre el área dA será igual a $\delta F = (\rho v' dA)(-u') \rightarrow \delta F/dA = -\rho u' v'$



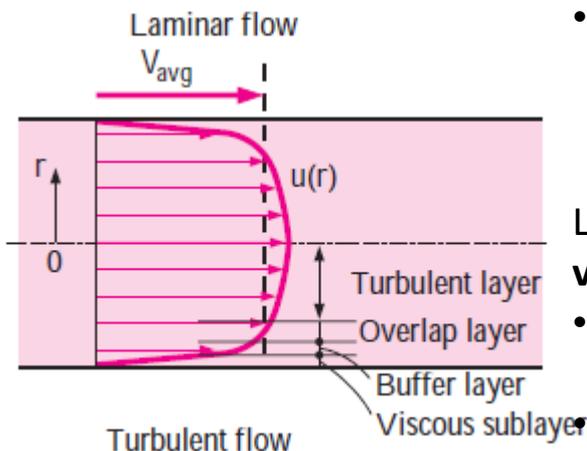
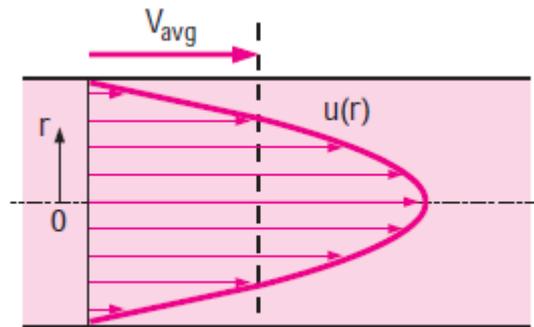
El esfuerzo de corte turbulento puede escribirse como:

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'}$$

Donde $\overline{u'v'}$ es el promedio del producto entre las fluctuaciones de velocidad en X e Y.

Perdida de Carga en Régimen Turbulento

“Se han desarrollado **modelos de turbulencia**, que modelan matemáticamente los **esfuerzos de corte en términos del gradiente de velocidades**”



$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\tau_{\text{total}} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Donde μ_t es llamada **viscosidad turbulenta** que explica el **transporte de cantidad de movimiento** debido a los **vórtices** o remolinos.

El flujo turbulento junto a la pared puede dividirse en cuatro capas.

- Subcapa **Viscosa** (1% del diámetro): Efectos viscosos dominantes, perfil casi lineal, líneas de corriente casi paralelas parecido al laminar.

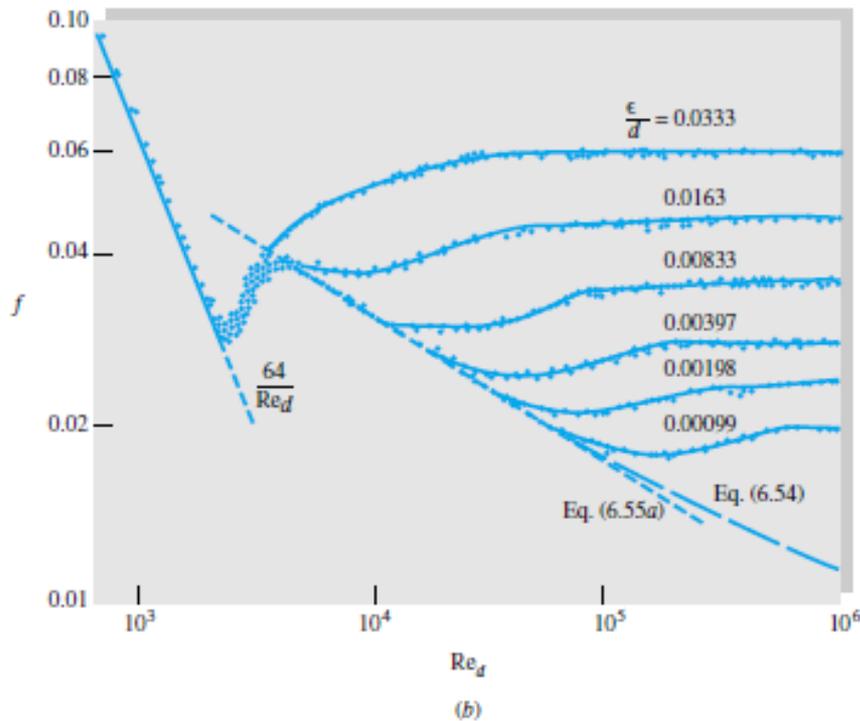
$$\tau_w = \mu \frac{u}{y} = \rho \nu \frac{u}{y} \rightarrow \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu u}{y}$$

La raíz cuadrada de $\frac{\tau_w}{\rho}$ tiene unidades de velocidad y se la conoce como **velocidad de fricción** $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$.

- Capa de **Amortiguamiento**: Efectos turbulentos significativos, pero dominan los efectos viscosos.
- Capa de **Traslape**: Efectos turbulentos mas significativos, pero todavía sin dominar sobre los viscosos.
- Capa de **Turbulenta**: Dominan efectos turbulentos sobre los viscosos.

Determinación del factor de fricción . Diagrama de Moody

Coeficiente de Darcy y Rugosidad relativa (Estudiante de Prandtl, J. Nikuradse, año 1933)



Material	Condition	ϵ		Uncertainty, %
		ft	mm	
Steel	Sheet metal, new	0.00016	0.05	± 60
	Stainless, new	0.000007	0.002	± 50
	Commercial, new	0.00015	0.046	± 30
	Riveted	0.01	3.0	± 70
	Rusted	0.007	2.0	± 50
Iron	Cast, new	0.00085	0.26	± 50
	Wrought, new	0.00015	0.046	± 20
	Galvanized, new	0.0005	0.15	± 40
	Asphalted cast	0.0004	0.12	± 50
Brass	Drawn, new	0.000007	0.002	± 50
Plastic	Drawn tubing	0.000005	0.0015	± 60
Glass	—	Smooth	Smooth	
Concrete	Smoothed	0.00013	0.04	± 60
	Rough	0.007	2.0	± 50
Rubber	Smoothed	0.000033	0.01	± 60
Wood	Stave	0.0016	0.5	± 40

Determinación del factor de fricción . Diagrama de Moody

Expresiones para la obtención del coeficiente de fricción, f :

Solución diferencial

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx 1.99 \log (Re_d f^{1/2}) - 1.02$$

Expresión de Prandtl

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2.0 \log (Re_d f^{1/2}) - 0.8$$

Expresión de Blasius

$$0.316 Re_d^{-1/4} \quad 4000 < Re_d < 10^5$$

Expresión de Colebrook (transición)

$$\left(1.8 \log \frac{Re_d}{6.9}\right)^{-2}$$

Expresión para flujo turbulento desarrollado

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \frac{\epsilon/d}{3.7}$$

Expresión de Colebrook (año 1939, tuberías lisas y rugosas)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (\text{turbulent flow})$$

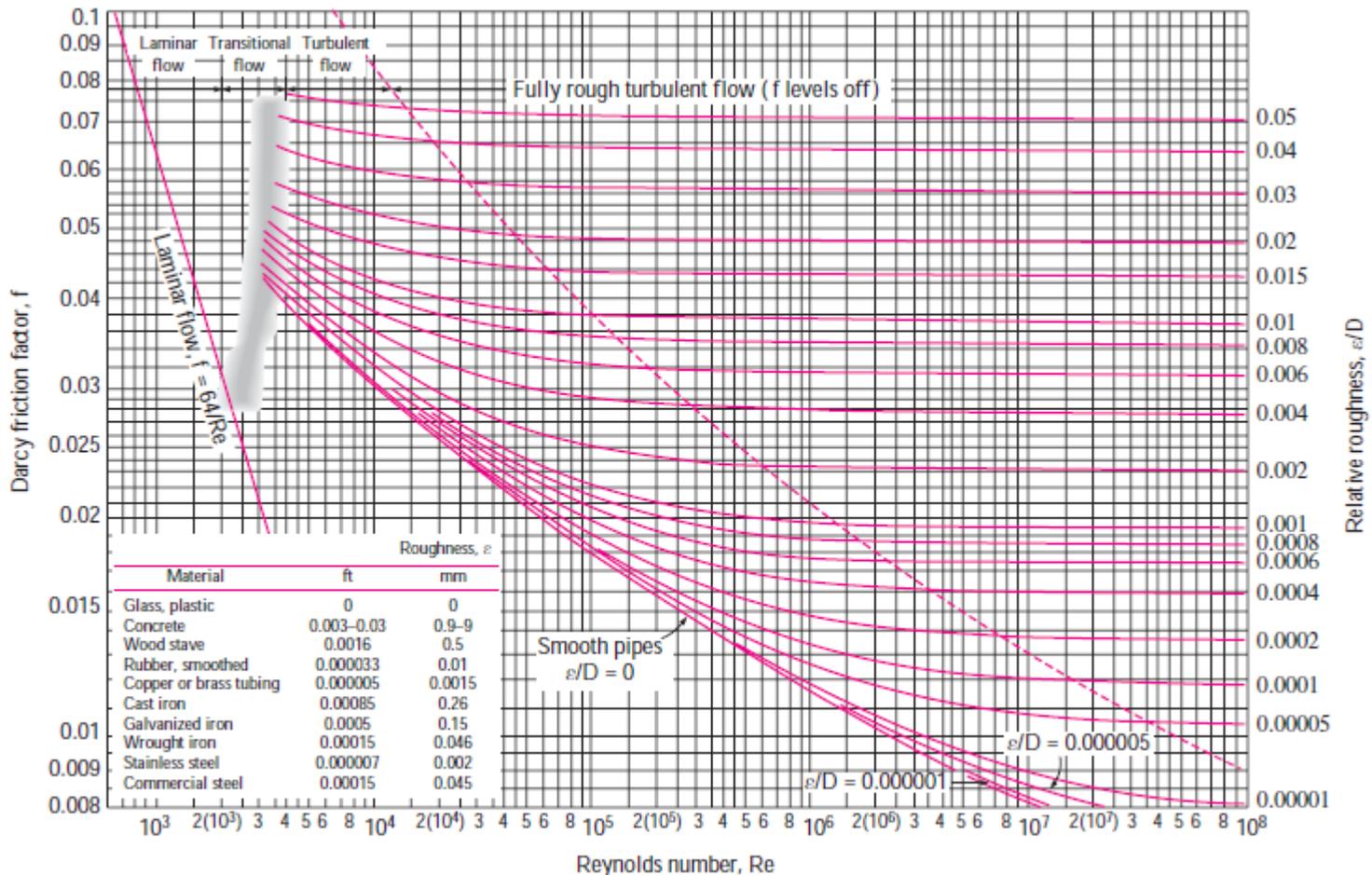
Expresión de Haaland

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

Dado que en la zona de transición ($2300 < Re < 4000$) el flujo es mixto, no existen valores confiables, por lo que se recomienda ensayar.

Determinación del factor de fricción . Diagrama de Moody

Diagrama de Moody
(año 1944)



Pérdida de carga en accesorios

Cada vez que la condición de flujo se desvía del caso unidimensional / ducto de sección constante, se produce una pérdida de carga.

Los casos más comunes y estudiados son:

- Entrada o salida de un ducto o cañería.
- Expansión o contracción súbita del ducto.
- Curvas, “codos”, bifurcaciones (“tes”) y otros accesorios.
- Válvulas, parcial o totalmente abiertas.
- Expansión o contracción gradual.

El coeficiente de pérdida de carga en accesorios se define como:

$$K_L = \frac{h_L}{V^2/(2g)} \rightarrow h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

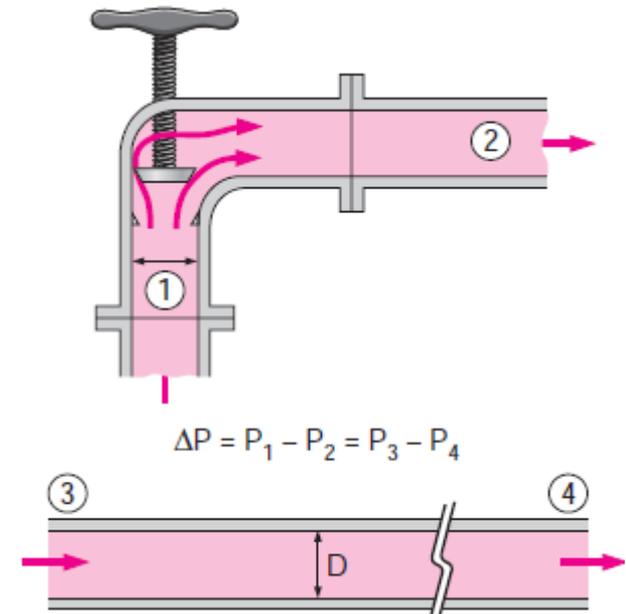
El mismo puede expresarse como una longitud equivalente:

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_{\text{equiv}}}{D} \frac{V^2}{2g} \rightarrow L_{\text{equiv}} = \frac{D}{f} K_L$$

Finalmente la pérdida de carga total será:

Si la velocidad es constante:

$$h_{L, \text{total}} = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

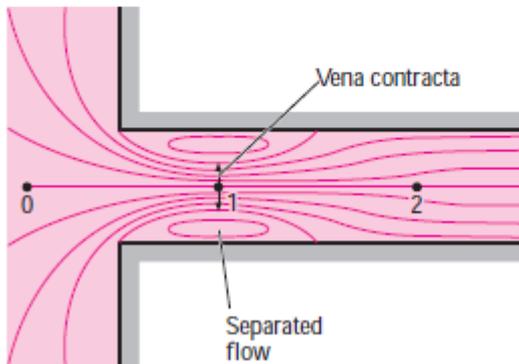
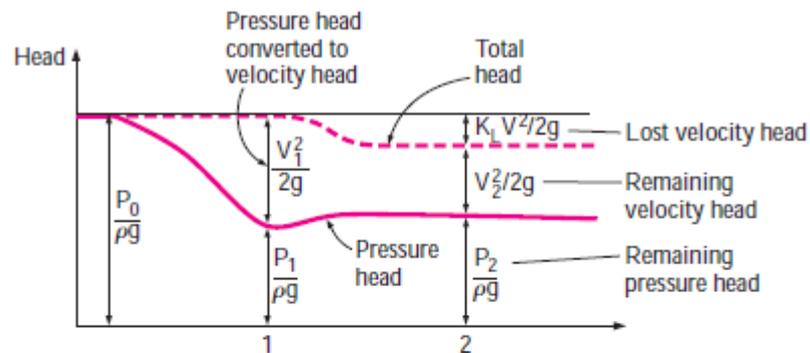


$$h_{L, \text{total}} = h_{L, \text{major}} + h_{L, \text{minor}}$$

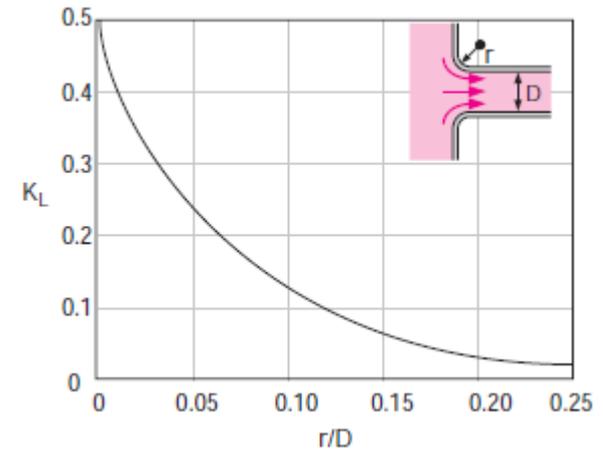
$$= \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j} \frac{V_j^2}{2g}$$

Pérdida de carga en accesorios.

Representación grafica de la contracción de la vena fluida y perdida de carga asociada:



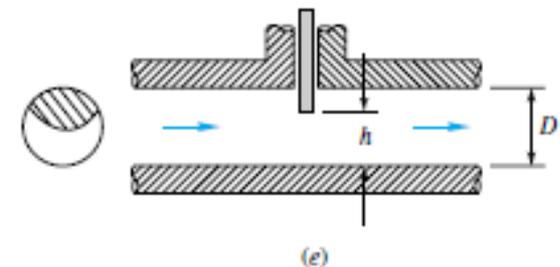
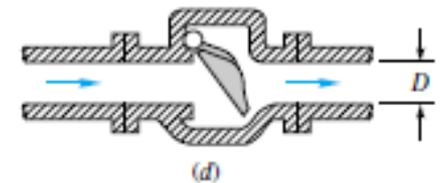
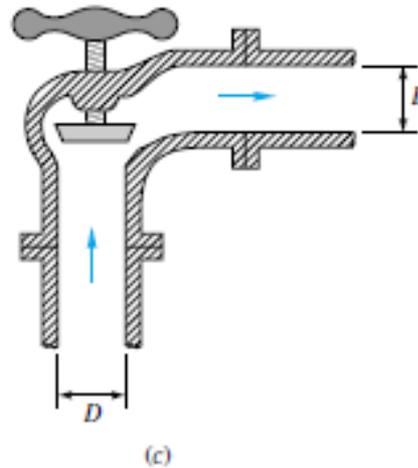
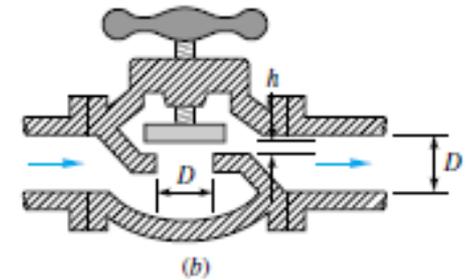
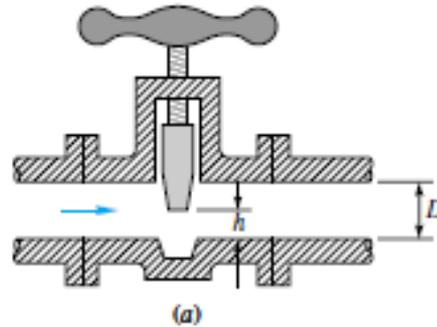
Efecto del redondeo de los bordes en el coeficiente de perdida de carga:



Pérdida de carga en accesorios.

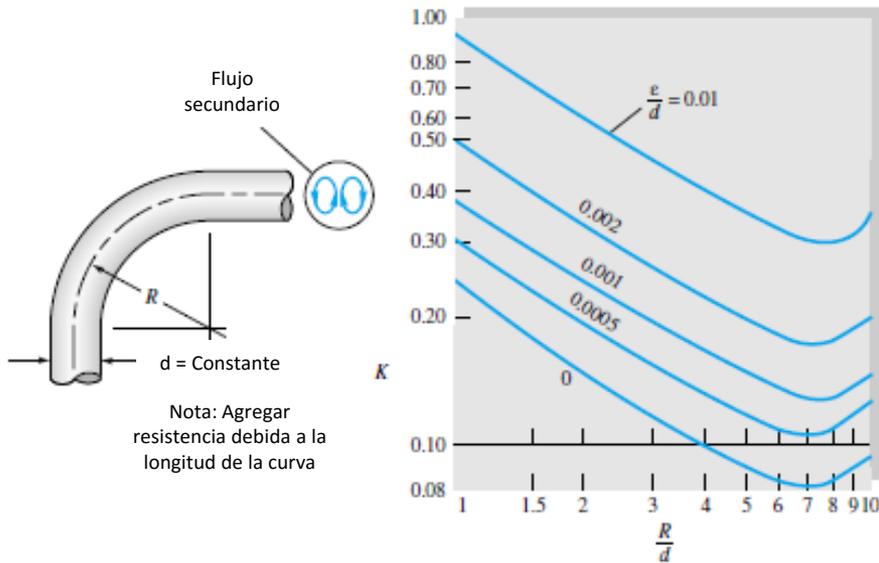
Distintos tipos de válvulas:

- a) De compuerta común
- b) De globo o globoidal
- c) En ángulo
- d) De retención (anti-retorno)
- e) De compuerta tipo disco

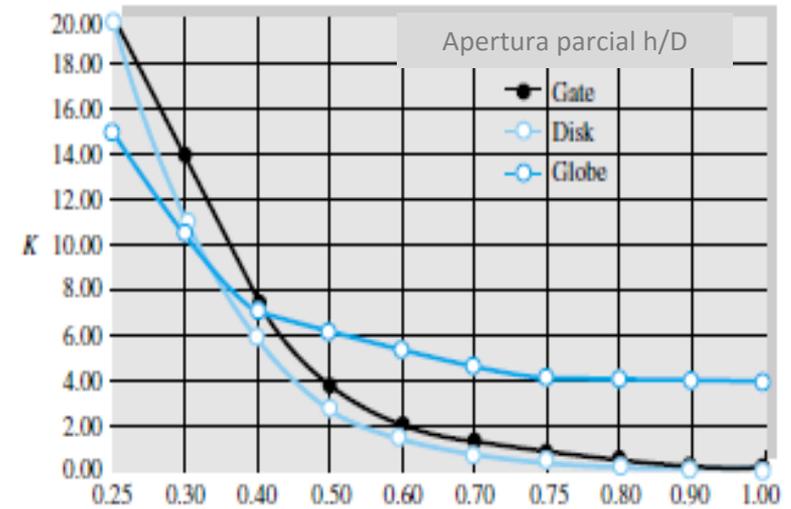


Pérdida de carga en accesorios.

Curvas:



Distintos tipos de válvulas. Aperturas parciales



Válvula de compuerta, disco y globo.

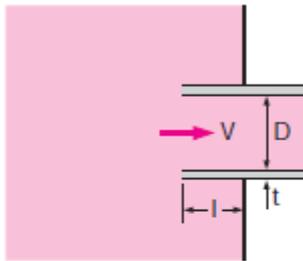
$$h_{L, \text{total}} = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

Pérdida de carga en accesorios.

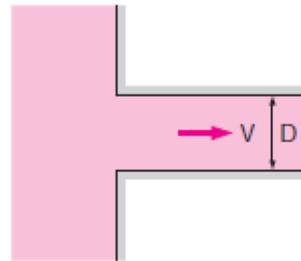
Loss coefficients K_L of various pipe components for turbulent flow (for use in the relation $h_L = K_L V^2 / (2g)$, where V is the average velocity in the pipe that contains the component)*

Pipe Inlet

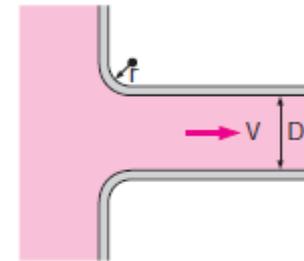
Reentrant: $K_L = 0.80$
($t \ll D$ and $l \approx 0.1D$)



Sharp-edged: $K_L = 0.50$

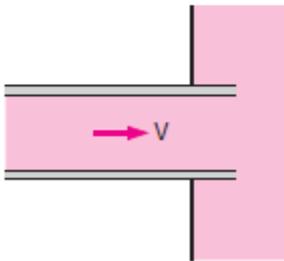


Well-rounded ($r/D > 0.2$): $K_L = 0.03$
Slightly rounded ($r/D = 0.1$): $K_L = 0.12$
(see Fig. 8-36)

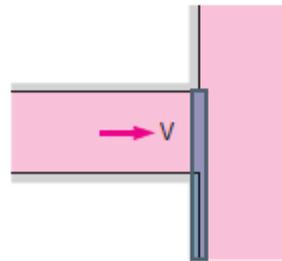


Pipe Exit

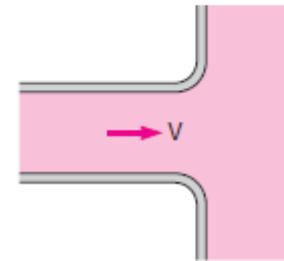
Reentrant: $K_L = \alpha$



Sharp-edged: $K_L = \alpha$



Rounded: $K_L = \alpha$

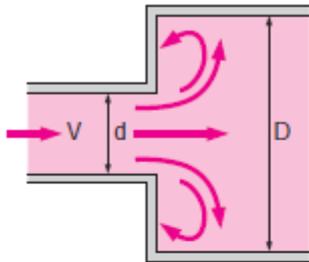


Note: The kinetic energy correction factor is $\alpha = 2$ for fully developed laminar flow, and $\alpha \approx 1$ for fully developed turbulent flow.

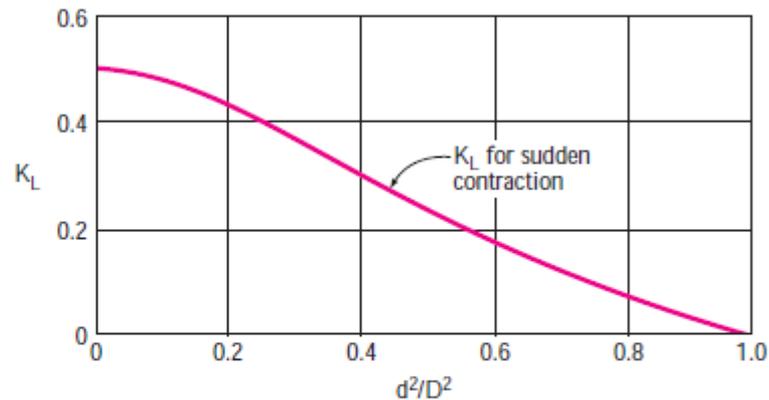
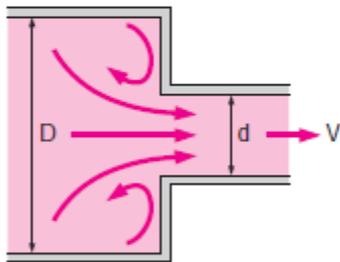
Pérdida de carga en accesorios.

Sudden Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

Sudden expansion: $K_L = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



Sudden contraction: See chart.



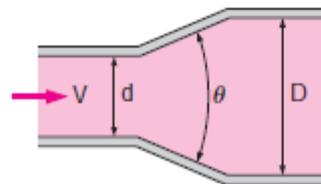
Gradual Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

Expansion:

$K_L = 0.02$ for $\theta = 20^\circ$

$K_L = 0.04$ for $\theta = 45^\circ$

$K_L = 0.07$ for $\theta = 60^\circ$



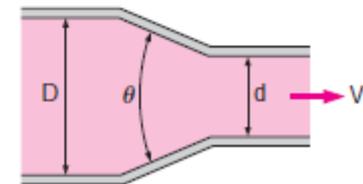
Contraction (for $\theta = 20^\circ$):

$K_L = 0.30$ for $d/D = 0.2$

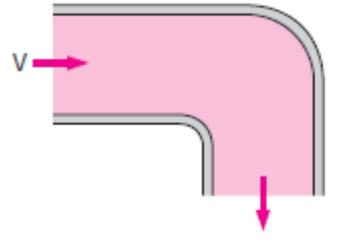
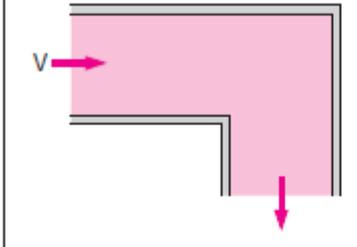
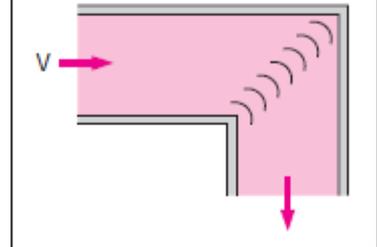
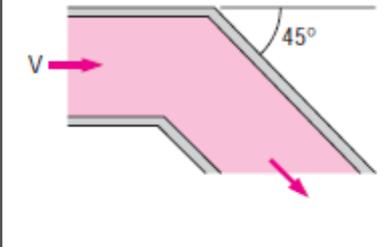
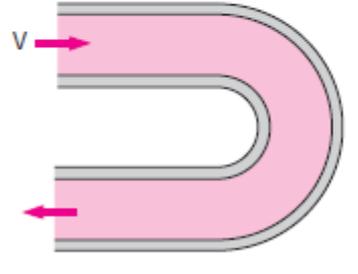
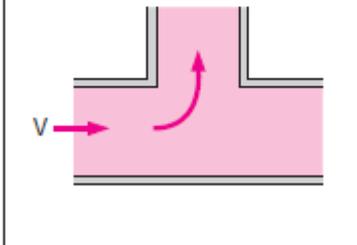
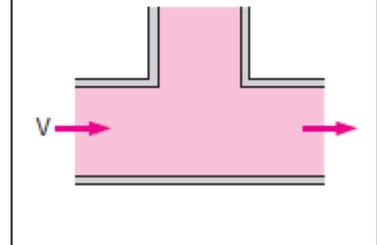
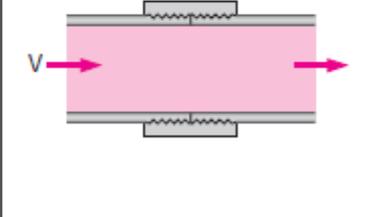
$K_L = 0.25$ for $d/D = 0.4$

$K_L = 0.15$ for $d/D = 0.6$

$K_L = 0.10$ for $d/D = 0.8$



Pérdida de carga en accesorios.

<p><i>Bends and Branches</i> 90° smooth bend: Flanged: $K_L = 0.3$ Threaded: $K_L = 0.9$</p> 	<p>90° miter bend (without vanes): $K_L = 1.1$</p> 	<p>90° miter bend (with vanes): $K_L = 0.2$</p> 	<p>45° threaded elbow: $K_L = 0.4$</p> 
<p>180° return bend: Flanged: $K_L = 0.2$ Threaded: $K_L = 1.5$</p> 	<p>Tee (branch flow): Flanged: $K_L = 1.0$ Threaded: $K_L = 2.0$</p> 	<p>Tee (line flow): Flanged: $K_L = 0.2$ Threaded: $K_L = 0.9$</p> 	<p>Threaded union: $K_L = 0.08$</p> 

Valves

Globe valve, fully open: $K_L = 10$
 Angle valve, fully open: $K_L = 5$
 Ball valve, fully open: $K_L = 0.05$
 Swing check valve: $K_L = 2$

Gate valve, fully open: $K_L = 0.2$
 1/2 closed: $K_L = 0.3$
 1/4 closed: $K_L = 2.1$
 1/8 closed: $K_L = 17$

Pérdida de carga en accesorios.

Coeficientes de pérdida de carga para distintos accesorios.

	Nominal diameter, in									
	Screwed					Flanged				
	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1	2	4	8	20	
Valves (fully open):										
Globe	14	8.2	6.9	5.7	13	8.5	6.0	5.8	5.5	
Gate	0.30	0.24	0.16	0.11	0.80	0.35	0.16	0.07	0.03	
Swing check	5.1	2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	
Angle	9.0	4.7	2.0	1.0	4.5	2.4	2.0	2.0	2.0	
Elbows:										
45° regular	0.39	0.32	0.30	0.29						
45° long radius					0.21	0.20	0.19	0.16	0.14	
90° regular	2.0	1.5	0.95	0.64	0.50	0.39	0.30	0.26	0.21	
90° long radius	1.0	0.72	0.41	0.23	0.40	0.30	0.19	0.15	0.10	
180° regular	2.0	1.5	0.95	0.64	0.41	0.35	0.30	0.25	0.20	
180° long radius					0.40	0.30	0.21	0.15	0.10	
Tees:										
Line flow	0.90	0.90	0.90	0.90	0.24	0.19	0.14	0.10	0.07	
Branch flow	2.4	1.8	1.4	1.1	1.0	0.80	0.64	0.58	0.41	

Pérdida de carga en accesorios.

Ejemplo

$$\mu = 1.02 \cdot 10^{-3} \frac{Kg}{m \cdot s}$$

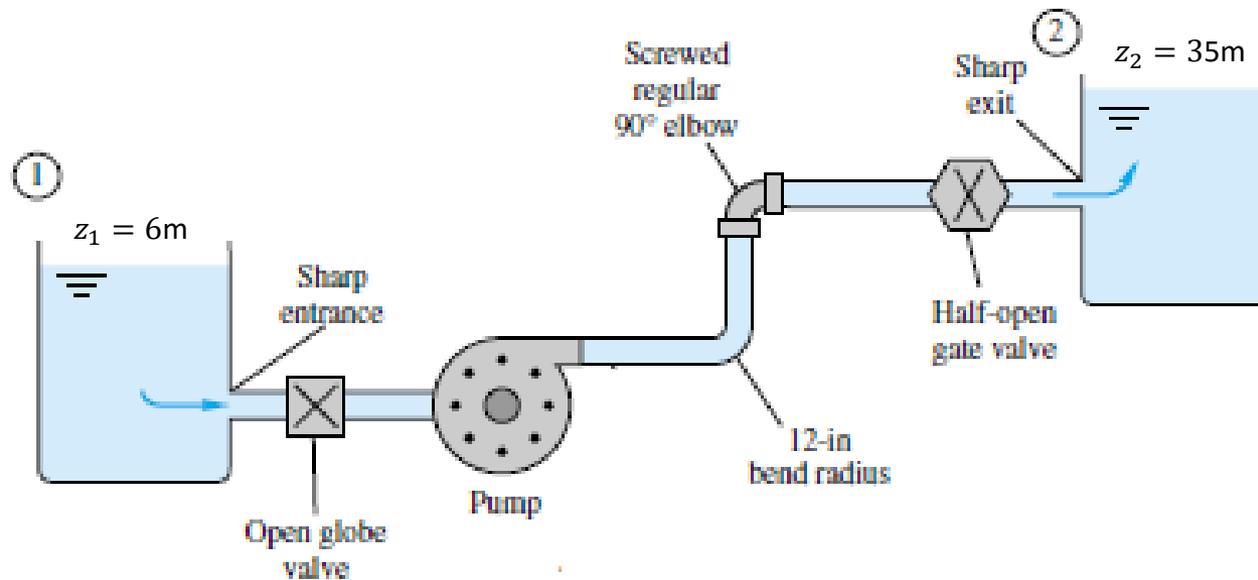
$$\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\varnothing = 50 \text{ mm}$$

$$L = 120 \text{ m}$$

$$\frac{e}{D} = 0.001$$

$$Q = 340 \frac{lbs}{min}$$



Pérdida de carga en accesorios.

Resolución del Ejemplo:

Aplicamos Principio de Conservación de la Energía entre los puntos 1 y 2 ubicados en la superficie libre de los tanques.:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + h_B - h_L = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$$Q = \frac{V}{A} A \rightarrow V = \frac{Q}{A} \rightarrow V = 2.8 \frac{m}{s}$$

Aplicamos Diagrama de Moddy:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = 139000 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} f = 0.022$$
$$\frac{e}{D} = 0.001$$

$$h_L = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g} = 26 \text{ m}$$

Loss	K
Sharp entrance	0.5
Open globe valve	6.9
12-in bend	0.15
Regular 90° elbow	0.95
Half-closed gate valve	2.7
Sharp exit	1.0
	$\Sigma K = 12.2$

Pérdida de carga en accesorios.

Resolución del Ejemplo:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + h_B - h_L = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Considerando las siguientes hipótesis :

$$P_1 = P_2 = P_{atm} ; V_1 = V_2 \cong 0$$

$$Z_1 + h_B - h_L = Z_2$$

$$h_B = Z_2 - Z_1 + h_L$$

$$h_B = 35 - 6 + 26 = 55 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{\text{Bombeo de la Bomba}} = \rho g h_B Q = 3054.3 \text{ Watts} = 4.09 \text{ HP}$$