PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL ENTRE VECTORES

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de los que se conoce que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- **a.** Con la información brindada, ¿se puede determinar si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^2? ¿ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^3?
- **b.** ¿Podemos afirmar que alguno de ellos es el vector nulo?
- **c.** Si la respuesta anterior fue negativa, ¿qué otra posibilidad existe para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

<u>*Respuestas*</u>:

- **a.** Con la información brindada no es posible determinar si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^2 o R^3 ya que la operación producto escalar está definida para vectores de ambos espacios.
- **b.** No es posible realizar tal afirmación, aunque sí es una posibilidad.
- **c.** El producto escalar entre vectores es cero si alguno de los es el vector nulo o si los vectores son perpendiculares.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{0} \lor \vec{b} = \vec{0} \lor \vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

2. ¿Es verdad que si $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{b} = \vec{c}$?

No es necesariamente cierto. Por ejemplo, puede ocurrir que $\vec{b} = \vec{0}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, es decir $\vec{c} \neq \vec{0}$, y en ese caso:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0 \quad \land \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cos(90°) = 0$$

Por lo que encontramos un caso donde $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$ pero $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Contraejemplo (en R^2):

Para $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (0; 0)$ y $\vec{c} = (-1; 2)$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, y $\vec{b} \neq \vec{c}$.

3. <u>Enunciado</u>: Si un vector $\vec{u}$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, entonces es perpendicular a cualquier combinación lineal entre ellos.

- **a.** ¿Qué información acerca de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ podemos extraer del enunciado?
- **b.** Demuestre la proposición.

Respuestas:

a. Dado que el vector $\vec{u}$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ninguno de ellos es el vector nulo.

b. Para realizar la demostración identificaremos la Hipótesis y la Tesis del enunciado:

Hipótesis:

- $\vec{u}$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

  Del enunciado anterior podemos determinar que:

  - Ninguno de los vectores es el vector nulo.
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
  - $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

Tesis:

- $\vec{u}$ perpendicular a cualquier combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

  De lo anterior: $\vec{u} \perp (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})$, con α y β no simultáneamente nulos.

Demostración:

Para demostrar que $\vec{u} \perp (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})$ basta con probar que $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = 0$. Tomando el primer miembro de la igualdad y aplicando propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) + \vec{u} \cdot (\beta\vec{w})$$

Por propiedad asociativa mixta en el producto escalar de vectores:

$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$$

Por hipótesis:

$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha 0 + \beta 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = 0$$

Luego, el vector $\vec{u}$ es perpendicular a cualquier combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

4. Lugares geométricos: Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que verifican una condición determinada. El álgebra vectorial nos permite, entre otras cosas, definir lugares geométricos a partir de operaciones entre vectores.

a. Identifique el lugar geométrico de los puntos $P \in R^2$, tales que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$.

b. Describa geométricamente el conjunto de vectores de R^2 tales que su módulo sea 2.

c. Exprese geométricamente el conjunto de todos vectores $\overrightarrow{OP}$ de R^3 tales que $|\overrightarrow{OP}| = 2$.

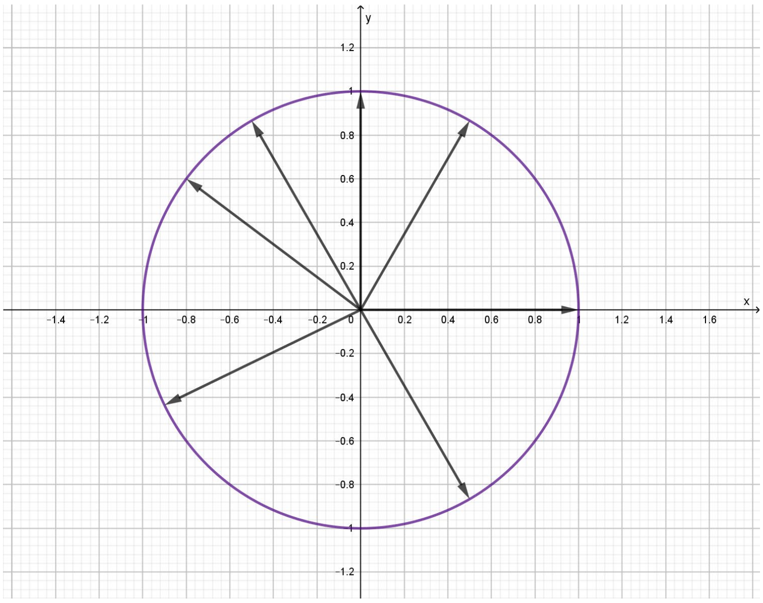
Respuestas:

a. Estamos identificando los puntos $P(x; y) \in R^2$ para los cuales su vector posición verifica: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = (x; y) \cdot (x; y) = 1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

La expresión anterior define una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1.



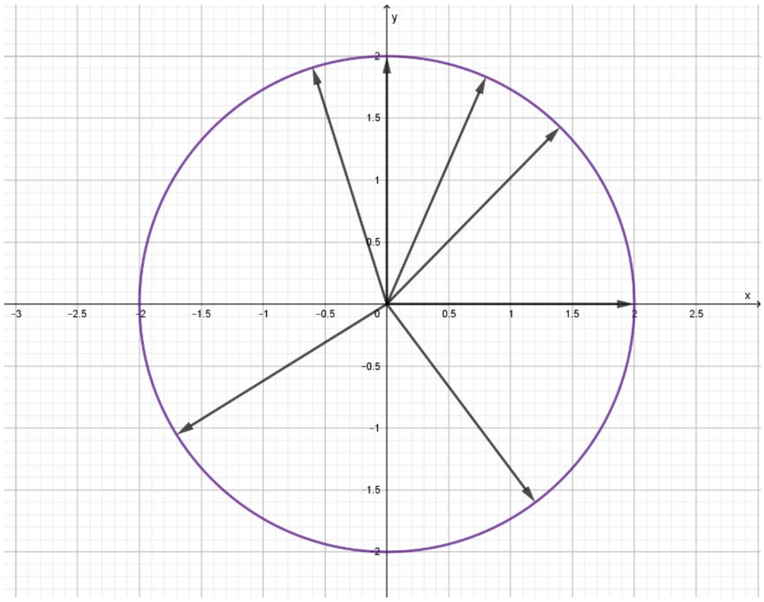
b. Tratamos de identificar los vectores $\vec{v}$ de R^2 para los cuales su módulo es 2:

$$\vec{v} = (x; y) \in R^2 \;/\; |\vec{v}| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2^2}$$

En este caso, la expresión anterior define una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 2.



c. En este caso, identificaremos a los vectores $\overrightarrow{OP}$ de R^3 para los cuales su módulo es 2:

$$\overrightarrow{OP} = (x; y; z) \in R^3 \;/\; \left|\overrightarrow{OP}\right| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 2^2}$$

La expresión anterior define una superficie esférica con centro en el origen de coordenadas y radio 2.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de los que se conoce que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

a. Con la información brindada, ¿se puede determinar si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^2? ¿ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^3?

b. ¿Podemos afirmar que alguno de ellos es el vector nulo?

c. Si la respuesta anterior fue negativa, ¿qué otra posibilidad existe para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Respuestas:

a. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^3 ya que la operación producto vectorial entre vectores se encuentra definida solo para vectores de dicho espacio.

b. No es posible realizar tal afirmación, aunque sí es una posibilidad.

c. El resultado del producto vectorial entre vectores es el vector nulo si alguno de ellos es el vector nulo o si los vectores son paralelos.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$$

6. ¿Es verdad que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{b} = \vec{c}$?

No es cierto. Si $\vec{b} = \vec{0}$ y $\vec{c} \parallel \vec{a}$, es decir $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ con $\lambda \neq 0$: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ y $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$ pero $\vec{b} \neq \vec{c}$.

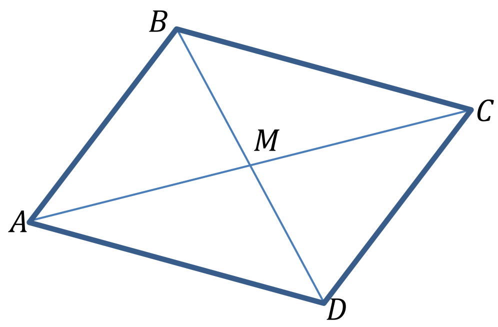
Contraejemplo:

Para $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (0; 0; 0)$ y $\vec{c} = (2; 0; 0)$: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, y $\vec{b} \neq \vec{c}$.

ALGUNAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

Enunciado1: *Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Figura de análisis



Hipótesis

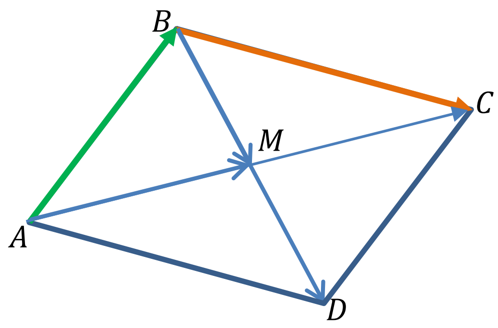
- $ABCD$ paralelogramo $\rightarrow \overline{AB}//\overline{DC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$, $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$

Tesis

- M es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ $\rightarrow \overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{MD}$

Demostración

Llamamos M al punto medio del segmento $\overline{BD}$, entonces $\overline{BM} = \overline{MD}$. Solo queda demostrar que M es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.



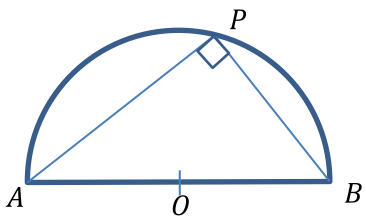
Orientando vectorialmente los lados y las diagonales del paralelogramo de la figura de análisis resulta:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} \quad [1]$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2]:



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = 2\overrightarrow{AM}$$

Luego,

$$\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}}$$

Luego, los puntos A, M y C son colineales, y es punto medio de $\overline{AC}$.

Enunciado 2: *Cualquier ángulo inscripto en un semicírculo es recto.*

Figura de análisis

Hipótesis

- $C_{O,r}$ semicírculo de centro O y radio r: $\overline{OA} = \overline{OB} = r$

Tesis

- $A\hat{P}B$ es recto $\rightarrow$ $\overline{PA} \perp \overline{PB}$

Demostración

De acuerdo con la figura de análisis, basta con demostrar que los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son perpendiculares.

Hallaremos el producto vectorial entre $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)$$

Aplicando propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$$

Por definición de producto escalar:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|cos(180°)-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|(-1)-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

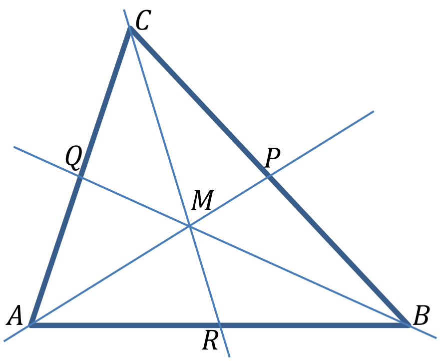
Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son vectores opuestos, por lo tanto $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=r$ y $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-r^2-\vec{0}+r^2\ \rightarrow\ \boxed{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0}$$

Luego, los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son perpendiculares y, en consecuencia, el ángulo $A\hat{P}B$ es recto.

Enunciado 3: *En todo triángulo, la distancia entre el baricentro y un vértice es el doble de la distancia entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto de dicho vértice.* (Nota: el baricentro de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas).

Figura de análisis



Hipótesis

- ABC triángulo.

- P punto medio del segmento $\overline{BC}$. Q punto medio del segmento $\overline{AC}$. R punto medio del segmento $\overline{AB}$.
- M baricentro del triángulo ABC.

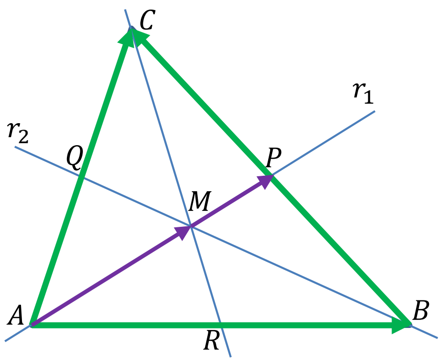
Tesis

- $dist(M,A) = 2dist(M,P)$ [1]
- $dist(M,B) = 2dist(M,Q)$
- $dist(M,C) = 2dist(M,R)$

Demostración

Demostraremos [1].

Orientaremos vectorialmente los lados del triángulo de la figura.



Comenzaremos por identificar el vector posición del baricentro del triángulo, para ello determinaremos las ecuaciones de las rectas r_1 y r_2 cuya intersección es el punto M:

$$r_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AP} \quad , \quad \forall\alpha \in R$$

$$r_2 : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{BQ} \quad , \quad \forall\beta \in R$$

Además,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \wedge \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$$

$r_1 \cap r_2$:

$$\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{BQ}$$

$$\overrightarrow{OA} + \alpha\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{OB} + \beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \beta\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \beta\overrightarrow{AB}$$

$$\alpha\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \beta\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} - \beta\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{AB}$$

$$\alpha\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\beta\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-\beta\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}$$

$$\alpha\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\beta\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\beta\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}$$

$$\left(\alpha\frac{1}{2}-\beta\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}=(1-\beta-\alpha)\overrightarrow{AB}$$

Pero $\overrightarrow{BC}\nparallel\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases}\alpha\frac{1}{2}-\beta\frac{1}{2}=0\\1-\beta-\alpha=0\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\alpha=\beta=\frac{2}{3}$.

Retomando la ecuación de r_1:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$$

De la figura de análisis: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}\right)$$

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MP}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|2\overrightarrow{MP}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=2\left|\overrightarrow{MP}\right|$$

$$\boxed{dist(M,A)=2dist(M,P)}$$

PARA PENSAR ALGO MÁS SOBRE RECTAS Y PLANOS

7. El conjunto $M = \{\vec{a} = (a_!; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), \vec{c} = (c_1; c_2; c_3)\}$ es un conjunto formado por tres versores mutuamente perpendiculares de R^3. Las componentes de dichos vectores se utilizan para definir los siguientes planos:

$$\pi_1 : a_1x + a_2y + a_3z = 0$$

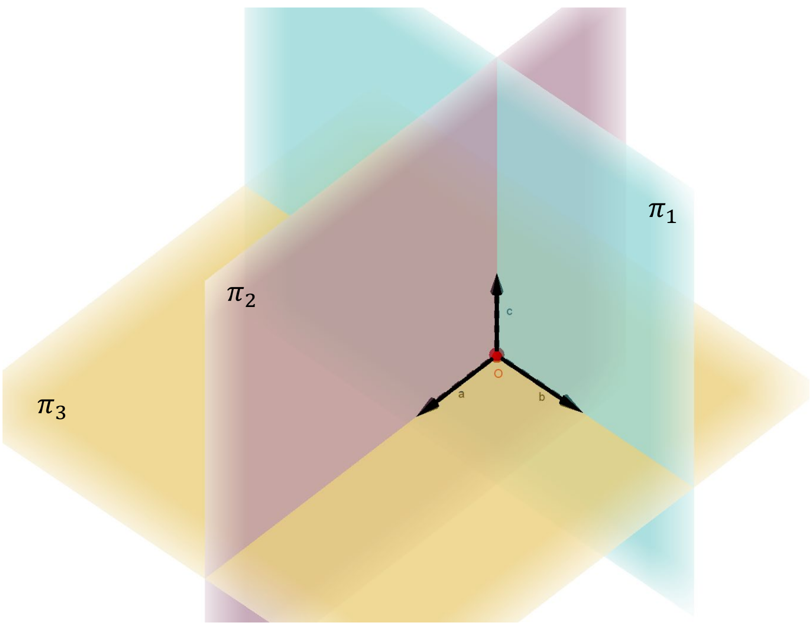
$$\pi_2 : b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

$$\pi_3 : c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

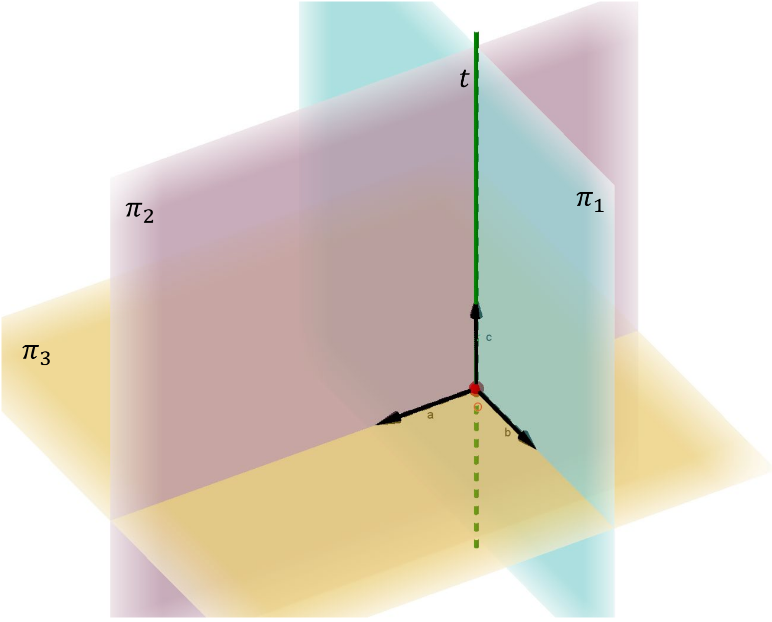
- **a.** Con la información brindada, ¿qué podemos decir de los planos π_1, π_2 y π_3?
- **b.** Identificar la intersección de los planos π_1 y π_2. Interpretar geométricamente. ¿Qué relación existe entre $\pi_1 \cap \pi_2$ y π_3?
- **c.** La recta $r : (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(\vec{a} + \vec{b})\ \forall\lambda \in R$, ¿está incluida en π_3?

Respuestas:

- **a.** Los tres planos son mutuamente perpendiculares y pasan por el origen de coordenadas.

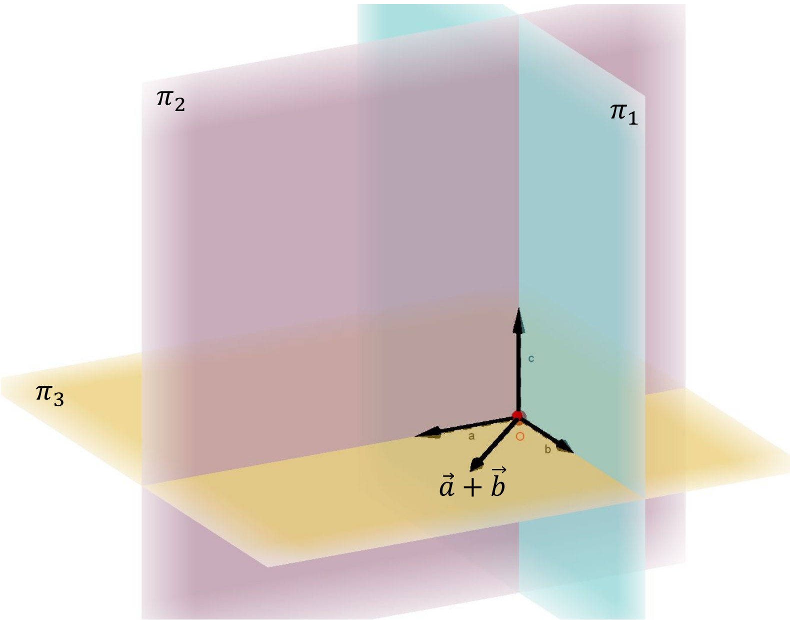


- **b.** La intersección de los planos π_1 y π_2 es una recta que pasa por el origen de coordenadas y resulta paralela a ambos planos, es decir, perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por lo tanto, la recta será paralela al vector $\vec{c}$, y su ecuación es $t : \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{c}, \forall\lambda \in R$.



La recta t es paralela al vector normal al plano π_3, por lo tanto, la recta es perpendicular al plano.

c. La recta $r : (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(\vec{a} + \vec{b})\ \forall\lambda \in R$, está dirigida por el vector $\vec{a} + \vec{b}$, que resulta un vector coplanar con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir que se trata de un vector paralelo al plano π_3. r estará contenida en el plano π_3 solo si el punto de coordenadas $(x_0; y_0; z_0)$ pertenece al plano π_3.



8. La recta $r : \begin{cases} \pi : 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \beta : x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y β. El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *haz de planos de arista* r, y su expresión analítica es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

siendo $a, b \in R$.

Para cada par de valores reales de a y b (salvo para $a = b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

- **a.** Hallar el plano del haz definido que pasa por el origen de coordenadas.
- **b.** Cuando $b = a$, con $a \neq 0$, ¿cuál es la distancia entre el plano que se obtiene y el origen de coordenadas?
- **c.** ¿Para qué valor real de k, uno de los planos es perpendicular a la recta $t : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$? ¿Cuál es ese plano del haz? Dar su ecuación general.
- **d.** Hallar los puntos que pertenezcan a todos los planos del haz.

<u>*Respuestas*</u>:

a. La expresión del haz de planos es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

para un valor de α y β determinado, el plano π pasa por el origen de coordenadas, es decir que $(0; 0; 0) \in \pi$:

$$a(2.0 + 3.0 - 0 - 4) + b(0 - 2.0 + 0 + 1) = 0$$

Donde $-4a + b = 0$. Es decir que existen valores de a y b no nulos, para que un plano del haz pase por el origen de coordenadas.

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 4$:

$$1(2x + 3y - z - 4) + 4(x - 2y + z + 1) = 0$$

La ecuación del plano del haz que pasa por el origen de coordenadas es

$$\boxed{\alpha : \; 6x - 5y + 3z = 0}$$

b. Si $b = a$ $(a \neq 0)$, la ecuación del plano es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + a(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$2ax + 3ay - az - 4a + ax - 2ay + az + a = 0$$

$$\alpha : \; 3ax + ay - 3a = 0 \; \rightarrow \quad Ec. general$$

El vector normal al plano es $\vec{n} = (3a; a; 0)$ y su módulo $|\vec{n}| = \sqrt{10a^2}$ es decir, $\vec{n} = \sqrt{10}|a|$.

La ecuación normal del plano α es:

$$\alpha : \frac{3a}{\sqrt{10}|a|}x + \frac{a}{\sqrt{10}|a|}y + \frac{-3a}{\sqrt{10}|a|} = 0$$

La distancia entre el origen de coordenadas y el plano α será:

$$dist(0; \alpha) = \left|\frac{-3a}{\sqrt{10}|a|}\right|$$

$$dist(0; \alpha) = \frac{|-3a|}{\left|\sqrt{10}|a|\right|}$$

$$dist(0; \alpha) = \frac{|-3||a|}{\sqrt{10}|a|}$$

$$\boxed{dist(0; \alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

c. De la expresión del haz de planos:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$$

El vector normal al plano será: $\vec{n} = (2a + b; 3a - 2b; -a + b)$.

De la ecuación de la recta $t : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$, un vector paralelo a ella es $\vec{u} = (3; 5; k)$. El plano será perpendicular a la recta si $\vec{n} \parallel \vec{u}$. Particularmente: $\vec{n} = \vec{u}$:

$$(2a + b; 3a - 2b; -a + b) = (3; 5; k)$$

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - 2b = 5 \\ -a + b = k \end{cases}$$

Trabajando con las dos primeras ecuaciones:

$$b = 3 - 2a \quad \wedge \quad 3a - 2(3 - 2a) = 5$$

de donde $a = \frac{11}{7}$ y $b = -\frac{1}{7}$. De la tercera ecuación:

$$-a + b = k \rightarrow \boxed{-\frac{12}{7} = k}$$

La ecuación general del plano perpendicular a la recta t es:

$$\boxed{\pi_t : 3x + 5y - \frac{12}{7}z - \frac{45}{7} = 0}$$

d. Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son aquellos que pertenecen a la recta $r : \begin{cases} \pi : 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \beta : x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$, es decir, los puntos que pertenecen a la intersección de los planos α y β.

$$r : \begin{cases} \pi : 2x + 3y - z - 4 = 0 & \rightarrow & \vec{n}_\pi = (2; 3; -1) \\ \beta : x - 2y + z + 1 = 0 & \rightarrow & \vec{n}_\beta = (1; -2; 1) \end{cases}$$

La recta r está contenida en ambos planos, por lo tanto, resulta perpendicular a los vectores $\vec{n}_\pi$ y $\vec{n}_\beta$. El vector $\vec{u}$, vector director de la recta, verifica:

$$r \parallel \vec{u} \ \wedge \ \vec{u} \parallel \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\beta$$

$$\vec{n}_\pi \times \vec{n}_\beta = (1; -3; -7) \rightarrow \boxed{\vec{u} = (1; -3; -7)}$$

Un punto de la recta puede ser aquél cuya ordenada es 0 ($y = 0$):

$$\begin{cases} 2x + 3.0 - z - 4 = 0 & \rightarrow & 2x - 4 = z \\ x - 2.0 + z + 1 = 0 & \rightarrow & z = -x - 1 \end{cases}$$

Del sistema anterior: $x = 1$ y $z = -2$. Un punto P de la recta r tiene coordenadas $P(1; 0; -2)$.

La ecuación vectorial – paramétrica de la recta r es:

$$\boxed{r : (x; y; z) = (1; 0; -2) + \lambda(1; -3; -7) \ , \forall \lambda \in R}$$

Los puntos de la recta r pertenecen a todos los planos del haz.

VINCULANDO: RECTAS – PLANOS – DISTANCIAS

Dadas las ecuaciones de R^3: $\pi_1 : \ 2x - y - 4z = 0$ y $\pi_2 : \ x + y + 3z = -2$

1) ¿Qué representa geométricamente cada una de estas ecuaciones?

Cada ecuación representa la ecuación de un plano, expresado en forma “casi” General Implícita.

¿Por qué “casi”? Porque la correspondiente a la segunda ecuación debería expresarse como:

$$\pi_2 : \ x + y + 3z + 2 = 0$$

Como corresponden a ecuaciones generales implícitas se pueden distinguir los vectores normales a cada plano.

Para el plano π_1: $\overrightarrow{n_1} = (2 \, ; \, -1 \, ; \, -4)$, además sabemos que dicho plano pasa por el origen de coordenadas, ya que el término independiente (D) vale: 0.

Para el plano π_2: $\overrightarrow{n_2} = (1\,;1\,;3)$, y este plano no pasa por el origen de coordenadas, porque D = 2.

¿Qué posiciones presentan estos planos?

No resultan paralelos, pues: $\overrightarrow{n_1}$ no es paralelo con $\overrightarrow{n_2}$ ($\nexists\ \alpha \in R \ / \ \overrightarrow{n_1} = \alpha\,\overrightarrow{n_2}$) ($\overrightarrow{n_1}\ x\ \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$)

Por lo tanto, los dos planos se cortan.

2) ¿Cómo podemos determinar la intersección de ambos planos?

Debemos resolver: $\begin{cases} 2x - y - 4z = 0 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases}$. ¿Qué obtendremos por resultado? La ecuación de una recta.

Para poder escribir la ecuación de esta recta en su forma Vectorial Paramétrica, debemos conocer las coordenadas de un punto que pertenezca a la recta y las componentes de un vector que la dirija.

¿Cómo podemos conseguir las coordenadas de un punto que pertenezca a dicha recta?

Una forma es asignándole el valor a una de las coordenadas, para obtener un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas, que determinarán las coordenadas faltantes de dicho punto.

En este caso particular, analizando los coeficientes de las variables en cada una de las ecuaciones que conforman el sistema, sería conveniente la asignación: $z = 0$, con lo cual el sistema a resolver queda reducido a: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$, que al resolverlo, obtenemos: $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{4}{3}$ y las coordenadas del punto quedan expresadas: $P\left(-\frac{2}{3}\,;-\frac{4}{3}\,;0\right)$. ¿Cómo verificamos si este punto P pertenece a la recta intersección de los dos planos?

Nos falta determinar las componentes del vector que dirige a la recta. Como el vector que la dirige debe resultar perpendicular a los dos vectores normales a los planos, podemos obtenerlo:

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1}\ x\ \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - 10\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k} = (1\,; -10\,;3)$$

Luego: $\pi_1 \cap \pi_2 = r_1 : \overrightarrow{OP} = (x\,;y\,;z) = \left(-\frac{2}{3}\,;-\frac{4}{3}\,;0\right) + \lambda\,(1\,; -10\,;3)\ \ \forall\lambda\,\varepsilon\,R$

3) Dado el punto: $Q\,(-1\,;2\,;\,-1))$. ¿Q pertenece a alguno de los planos dados? ¿Cómo lo puede determinar?

4) Dada la ecuación de la recta:

$$s: \ \overrightarrow{OP} = (-1\,;2\,;-1) + \mu\,(1\,;-10\,;3) \qquad \forall\, \mu \in R$$

a) ¿ $r \equiv s$? ¿Por qué?
b) ¿Es posible determinar algún valor de λ para que: $Q \in r$? y ¿el valor de μ para que $P \in s$?
c) Determine: $d\,(P\,;\pi_1)$, $d\,(Q;\,\pi_2)$ y $d\,(Q\,;r)$.
d) ¿A qué octantes pertenecen los puntos P y Q?

5) Expresen las ecuaciones normales o hessianas de los planos: π_1 y π_2 . ¿Cuál es la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los planos?

6) ¿Es posible encontrar la ecuación normal de la recta r ó s? ¿Por qué?

7) Calcular valores del parámetro real "k" para que la $d\,(R\,;\pi_2) = \sqrt{11}$, sabiendo que: $R\,(-2\,;k\,;1)$.

8) Obtener el valor real de "k", tal que si: $A\,(1\,;5\,;-k)$, se verifique que: $d\,(A\,;s) = \sqrt{110}$. ¿Es único el valor de "k" hallado? ¿Por qué?

9) Encontrar una ecuación del plano paralelo al plano π_2 , tal que la distancia entre ambos resulte igual a: 5.

10) ¿Es posible encontrar puntos $P\,(x\,;y\,;z)$, tales que la distancia π_1, verifiquen que: $d\,(P\,;\pi_1) = 3$? En caso afirmativo, que representa geométricamente la solución hallada y en caso negativo justifique la respuesta.