

$$(2) \mathbf{J}_{zy} = \int_F z \cdot y \cdot dF$$

Considerando que,

$$(3) \begin{cases} y = \rho \cdot \text{sen } \alpha \\ z = \rho \cdot \text{cos } \beta \end{cases}$$

2

Reemplazando (3) en (1),

$$(4) d\mathbf{J}_{zy} = \rho^2 \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot dF$$

Ahora bien, con centro en un punto arbitrario **C**, trazamos una circunferencia que pase por el origen de coordenadas **O**, y diámetro arbitrario $D = 2R$. Los ejes coordenados z e y , interceptan la circunferencia en los puntos **A** y **D** respectivamente. Trazamos la secante \overline{AB} .

si prolongamos el radio ρ hasta cortar la circunferencia en E. El ángulo $\widehat{EBA} = \widehat{\alpha}$ por abarcar el mismo arco \widehat{EA} . La distancia $\overline{EM} = h$, será entonces,

$$h = \overline{EB} \cdot \text{sen } \alpha \quad (5)$$

Ahora, trazamos un diámetro que pase por el punto **B**, y corte a la circunferencia en el punto **G**. El segmento $\overline{BG} = 2R$, y, el ángulo $\widehat{BGE} = \widehat{\beta}$ por abarcar el mismo arco \widehat{EB} . Deducimos, de aquí,

$$\overline{EB} = 2R \cdot \text{sen } \beta \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5), resulta,

$$h = 2R \cdot \text{sen } \widehat{\alpha} \cdot \text{sen } \widehat{\beta} \quad (7)$$

De aquí, despejamos el producto de los senos de los ángulos,

$$(8) \frac{h}{2R} = \text{sen } \widehat{\alpha} \cdot \text{sen } \widehat{\beta}$$

Reemplazando la expresión (8) en (1), la misma se puede escribir,

$$(9) d\mathbf{J}_{zy} = \frac{\rho^2 dF}{2R} \cdot h$$

Considerando una masa ideal $\frac{\rho^2 dF}{2R}$, el momento estático dJ_{zy} de una masa ideal que se encuentra ubicada en el punto E de la circunferencia, respecto de la cuerda \overline{AB} , cuya distancia a la cuerda es $\overline{EM} = h$.

Por ejemplo, otro diferencial dF' , con una distancia al centro O, es r' , tendrá representada una masa ideal $\frac{\rho^2 dF'}{2R}$, representada en F en la circunferencia, y, el momento estático será,

$$(10) \quad dJ_{zy} = \frac{\rho^2 dF'}{2R} \cdot h'$$

siendo $\overline{FN} = h'$ la distancia de la masa ideal a la cuerda \overline{AB} , como se muestra en la figura n° 2.

El punto **P**, es el punto principal de inercia y se denomina polo, y la distancia h_p distancia polar. O sea que la distancia polar queda,

$$h_p = \frac{\int_F \frac{\rho^2 dF}{2R} h}{\int_F \frac{\rho^2 dF}{2R}} \quad (13)$$

Esta situación la mostramos en la figura n^o 3. Siendo,

$$J_P = \int_F \rho^2 dF \quad (14)$$

Podemos expresar (12) de la siguiente forma:

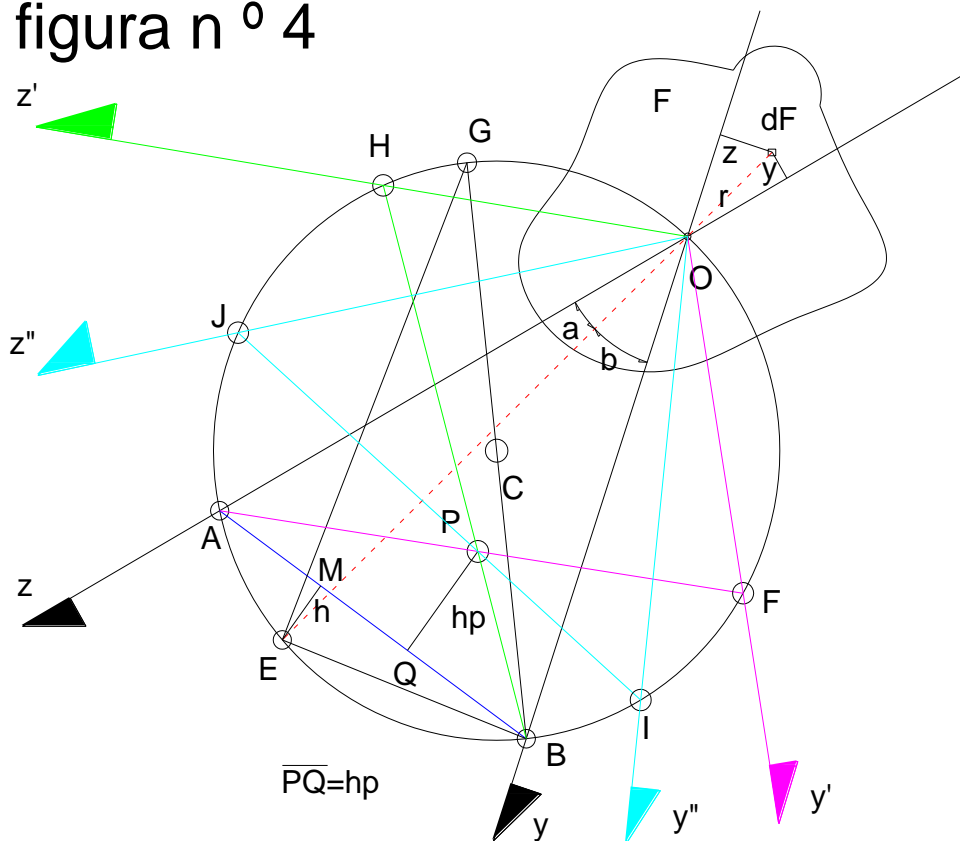
$$J_{zy} = h_p \cdot \frac{J_P}{2R} \quad (15)$$

Siendo,

$$\frac{J_P}{2R} = Esc J \quad (16)$$

La expresión (16) es la escala del momento de inercia, razón por la cual, cuando comenzamos la explicación del tema dijimos que el diámetro de la circunferencia es arbitrario.

figura n^o 4



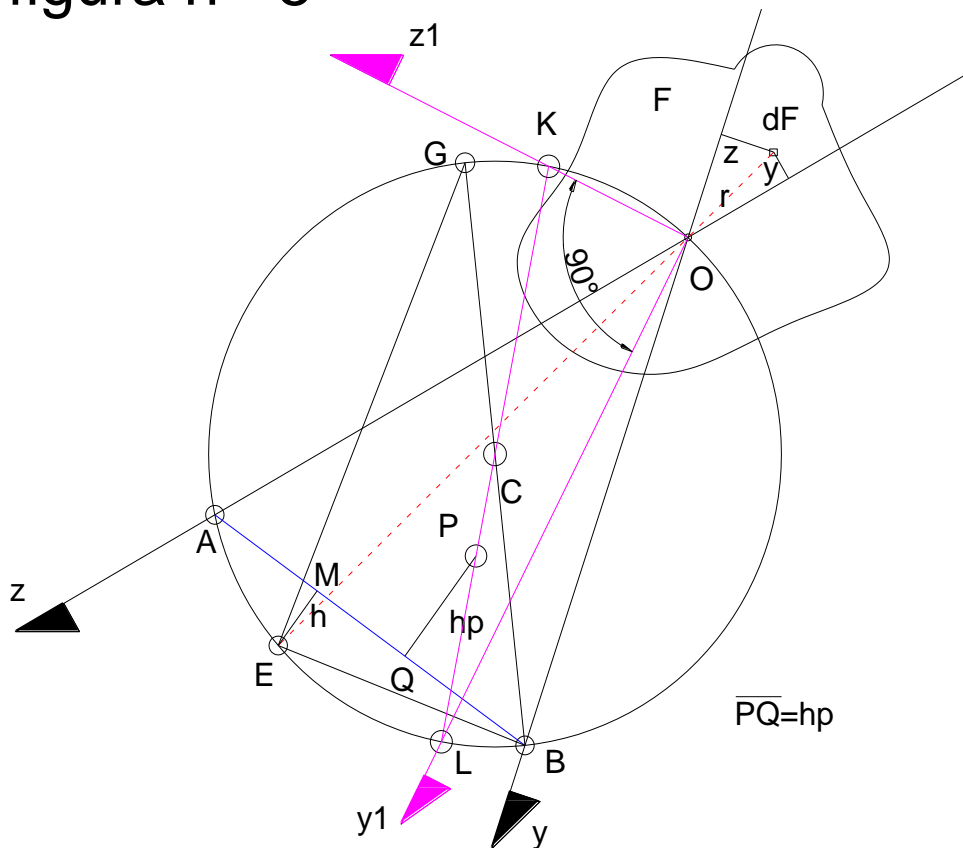
7

Como observamos de la figura n^o 4, la cuerda \overline{AF} correspondiente a los ejes $z ; y'$, la cuerda \overline{BH} correspondiente al par de ejes $z' ; y$, y la cuerda \overline{IJ} del par de ejes $z'' ; y''$, pasan por el polo P , en consecuencia, sus distancias polares $h_p = 0$, siendo nulos, en consecuencia, los momentos centrífugos de la figura e respecto estos ejes.

Conclusión: Existen infinitos pares de ejes conjugados de inercia

Ejes principales de inercia. Es aquel par de ejes coordenados que son conjugados y ortogonales. En la figura n^o 5, mostramos el par de ejes $z_1 ; y_1$ que cumplen esta condición.

figura n^o 5



8

observamos en la figura n^o 5, la cuerda \overline{KL} pasa por el polo P, con lo cual su distancia polar $h_p = 0$, y, además por el centro C de la circunferencia, debiendo ser la cuerda, un diámetro de la misma para cumplir la condición de ejes principales.

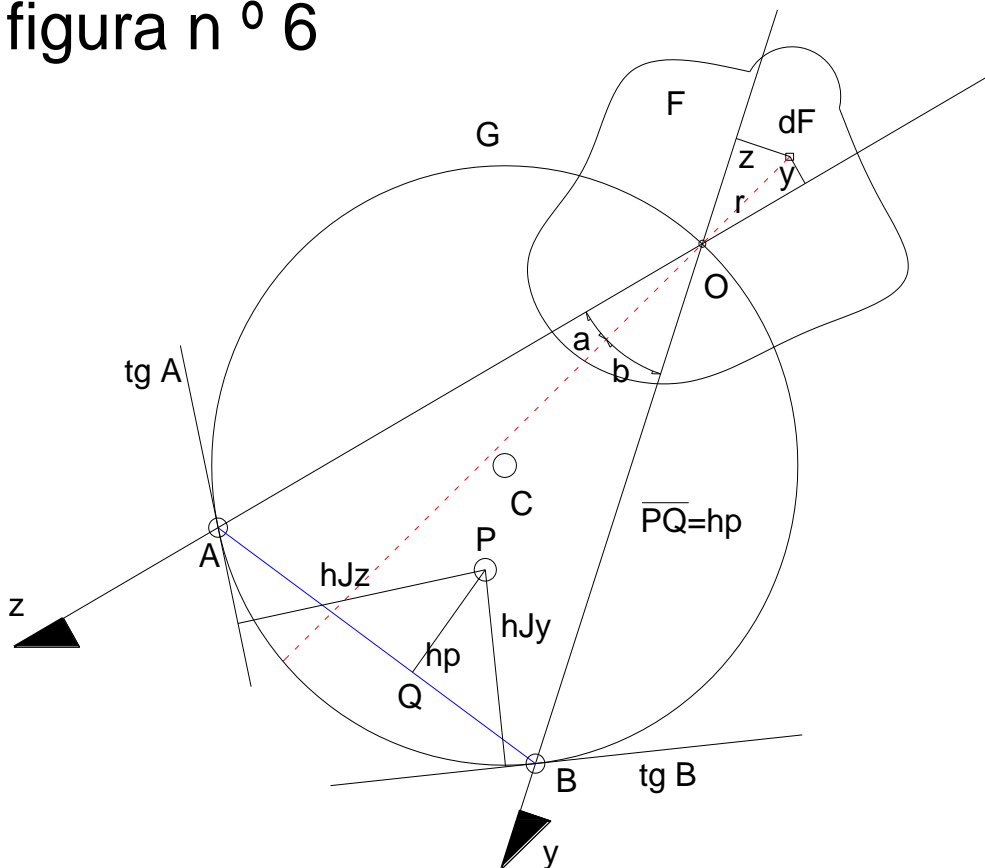
Conclusión: Existe un solo par de ejes principales en la circunferencia de MOHR.

Determinación de los momentos de inercia de los ejes z e y en la circunferencia

Consideremos la figura n^o 3, en la cual, hacemos girar un eje cualquiera hasta hacerlo coincidir con el otro, por ejemplo, giramos el eje y hasta coincidir con z, el punto B coincide con A, la cuerda \overline{AB} se transforma en tangente en A, con lo cual, la distancia h_p , se transforma en la distancia a la tangente a la circunferencia en A, en consecuencia, de acuerdo a lo estudiado, esta distancia multiplicado por la escala de momento de inercia mide el momento de inercia respecto del eje z. Esta distancia la indicamos con $h J_z$. A la inversa, si hacemos girar el eje z hasta hacerlo coincidir con el eje y, el punto A coincide con el punto B, la

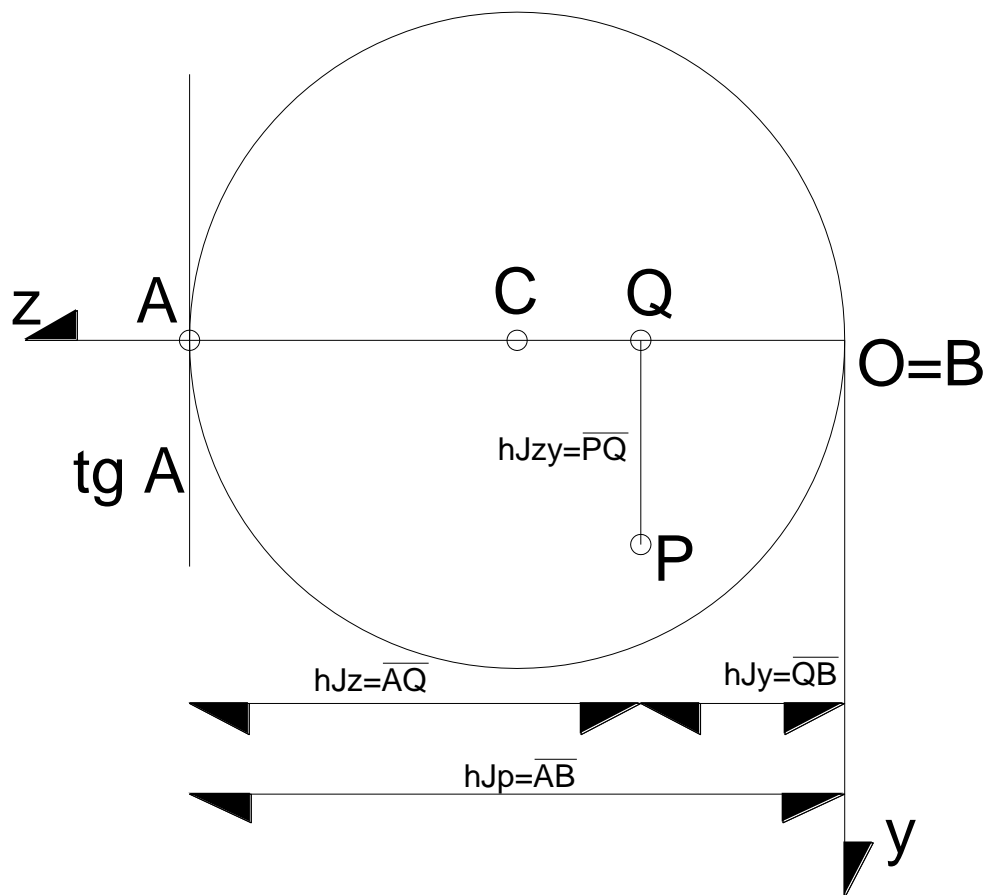
cuerda \overline{AB} se transforma en la tangente en **B**, con lo cual, la distancia h_p , se transforma en la distancia a la tangente a la circunferencia en **B**, en consecuencia, esta distancia multiplicado por la escala de momento de inercia mide el momento de inercia respecto del eje **y**. Esta distancia la indicamos con $h J_y$. En la figura n° 6 mostramos estas situaciones.

figura n° 6



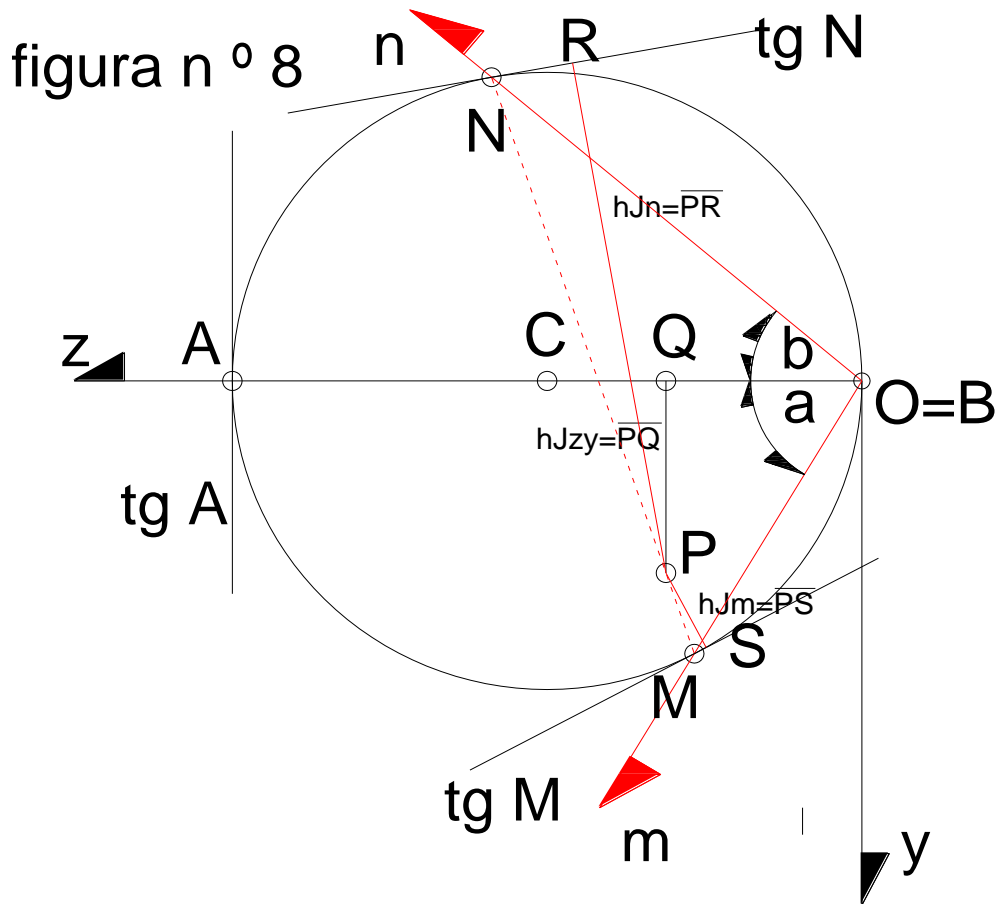
Si en el diagrama de la figura n° 6 giramos el eje **y** hasta que sea tangente a la circunferencia en **O**, y giramos el eje **z** al rededor de **O** hasta que pase por el centro de la misma, resultando ambos ejes normales, la cuerda \overline{AB} coincide con un diámetro \overline{AO} , la distancia \overline{AO} representa en la escala el momento centrífugo J_p . La tangente en **A** ($tg A$) es normal a **z**, y $h J_z = \overline{QA}$ representa en la escala de momento de inercia J_z , mientras que la tangente en **B** ($tg B$) es coincidente con el eje **y**, siendo $h J_y = \overline{QB} = \overline{QO}$. representa en la escala J_y . La distancia $\overline{PQ} = h$ representa en la escala J_{zy} . En la figura n° 7 representamos esta circunferencia de **MOHR**.

figura n^o 7



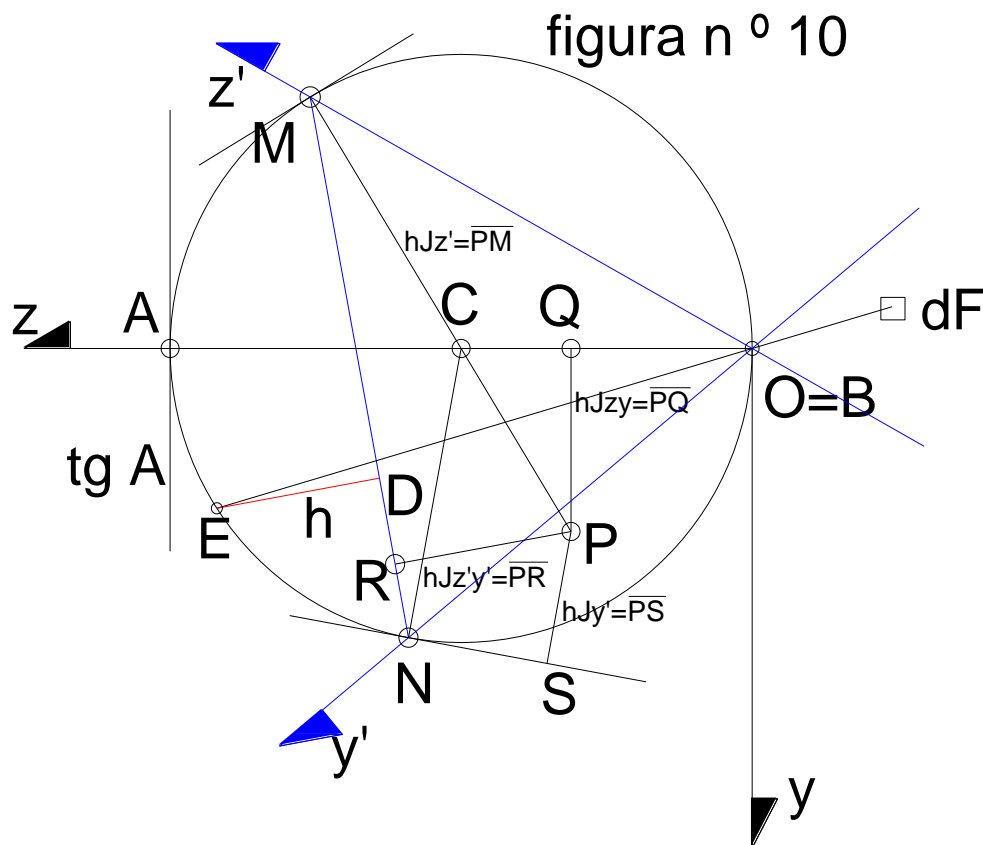
10

Ejes conjugados de inercia. Consideremos un eje m que forma un ángulo α con z , y su conjugado, eje n forma un ángulo β con el mismo eje z . Luego, para trazar el eje conjugado de α , desde el punto M , donde intercepta el eje m la circunferencia, llevamos un segmento \overline{MN} , de forma tal que el polo P pertenezca a este segmento, y, trazamos el eje conjugado n con origen O que pase por N , como se muestra en la figura n^o 8. En cuanto a los momentos de inercia respecto de estos ejes m y n , determinamos las distancias $h J_m$ y $h J_n$ respecto de las tangentes a la circunferencia en los puntos M y N respectivamente como se muestra la figura n^o 8. Luego, multiplicando estas distancias por la escala de momento de inercia, obtenemos los respectivos momentos de inercia J_m y J_n .



$$(19) \quad J_m = \overline{PS} \cdot Esc J \quad J_n = \overline{PR} \cdot Esc J$$

Ejes principales de inercia. Para determinar los ejes principales, trazamos el diámetro que pase por el polo P. Este diámetro intercepta la circunferencia en los puntos F y G, luego, dos ejes z_1 e y_1 de origen O, que pasen por los puntos F y G respectivamente como lo indicamos en la figura n^o 9. Los momentos principales de inercia J_{z_1} y J_{y_1} se determinan mediante las distancias $h J_{z_1} = \overline{PF}$ y $h J_{y_1} = \overline{PG}$, debido a que estas distancias son perpendiculares a las tangentes a la circunferencia en los puntos F formando un ángulo α con el eje z, y G respectivamente. Finalmente, multiplicando las longitudes de los segmentos \overline{PF} y \overline{PG} por la escala de momento de inercia, se obtienen los momentos de inercia máximo y mínimo correspondientes como lo indicamos en la figura n^o 9.



Luego, los momentos de inercia $J_{z'}$ y $J_{y'}$ quedan,

$$(21) \begin{cases} J_{z'} = \overline{PM} \cdot Esc J \\ J_{y'} = \overline{PS} \cdot Esc J \end{cases}$$

El momento centrífugo $J_{z'y'}$ se determina en valor absoluto en forma análoga,

$$(22) J_{z'y'} = \overline{PR} \cdot Esc J$$

Solo resta determinar el signo del momento centrífugo. Para ello consideramos un elemento de superficie dF , para el cual $dJ_{z'y'}$ es positivo por hallarse entre dos semi ejes del mismo signo, y, su representación en la circunferencia de **MOHR** en el punto **E**, cuya distancia a la cuerda \overline{MN} es h , y, de acuerdo a (9),

$$(9) \quad dJ_{zy} = \frac{\rho^2 dF}{2R} \cdot h$$

Siendo la masa ideal $\frac{\rho^2 dF}{2R}$ es siempre positiva, para que el momento $dJ_{z'y'}$ sea positivo, deberá ser positiva la distancia h . Según observamos en la figura n.º 10, el segmento $h J_{z'y'} = \overline{PR}$ se encuentra del lado opuesto de la cuerda \overline{MN} al que se encuentra h , en consecuencia, el momento centrífugo respecto de los ejes $z' y'$ es negativo.

$$J_{z'y'} < 0 \quad (23)$$

Luego, en la figura n.º 11, muestra una representación con momento centrífugo positivo $J_{z''y''} > 0$ para el par de ejes $(z''; y'')$, y otra representación con momento centrífugo negativo

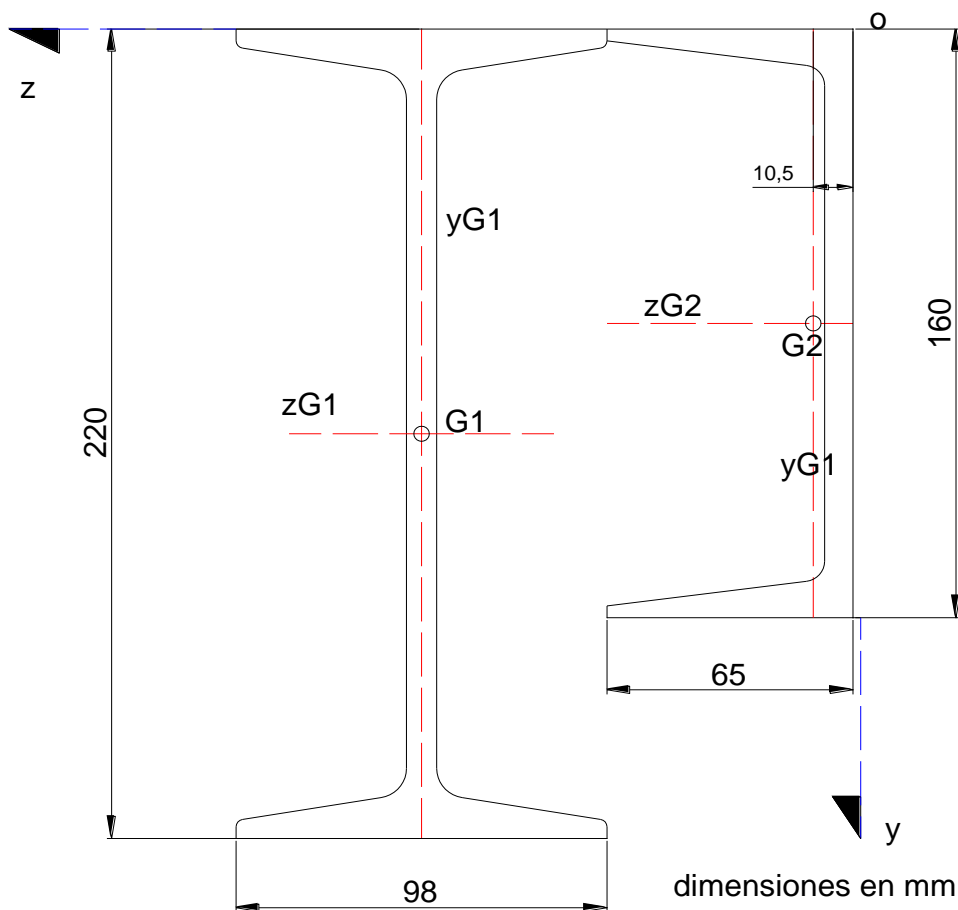
$J_{z^*y^*} < 0$ para el par de ejes $(z^*; y^*)$.

Como ejemplo de aplicación, consideramos la continuación del ejercicio explicado en momentos de inercia o de segundo orden, para lo cual, deberemos recurrir al apunte correspondiente para extraer los datos correspondientes.

Se tiene dos perfiles normales adosados como lo indica la figura. Uno de ellos **PN I 22**, mientras que el segundo **PN U 16**. Para el conjunto, se pide determinar;

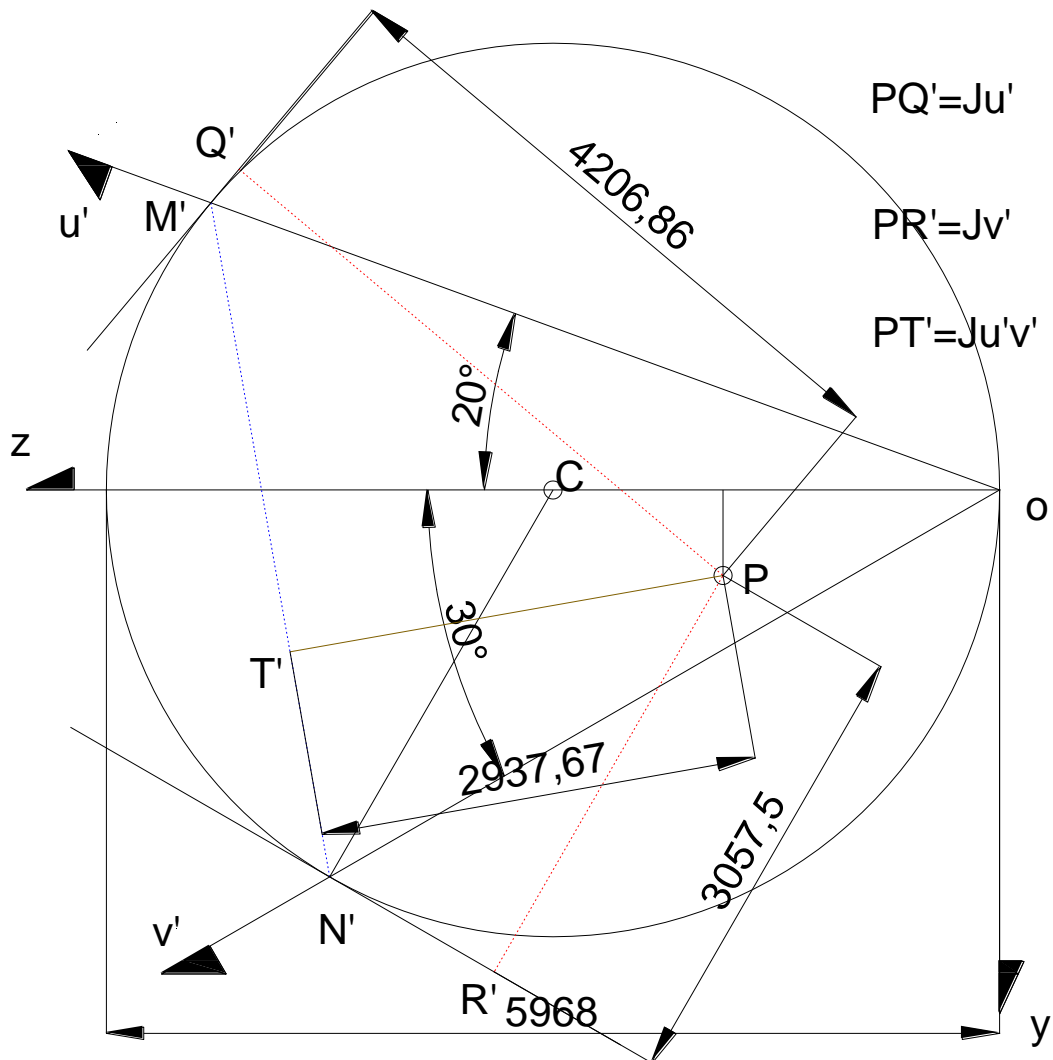
* h) Representar los ítems **b** al **g** en la circunferencia de **Mohr**.

16



Construimos la circunferencia de **Mohr** representando en el eje de abscisas los valores de los momentos de inercia, ubicando de conveniencia el segmento correspondiente a J_{yG} primeramente, y a continuación J_{zG} conformando el diámetro de la circunferencia, en

$\frac{J_{zG} + J_{yG}}{2}$ se encuentra el centro de la misma.



Luego, los momentos de inercia respecto de u' y v' se determinan al igual que el caso anterior por las distancias de los segmentos PQ' y PR' respectivamente a las tangentes a los puntos M' y N' donde los ejes u' y v' cortan a la circunferencia de Mohr multiplicados por la escala J . Mientras que $J_{u'v'}$ se determina por la distancia de PT' a la secante $M'N'$ multiplicada por la misma escala.

Como observamos en la figura, la gráfica nos permite leer el valor absoluto del momento centrífugo, mas no su signo. Debido a que la cuerda $M'N'$ está del mismo lado del polo P , es decir no separa el polo del origen de coordenadas, el signo del momento centrífugo es negativo.

