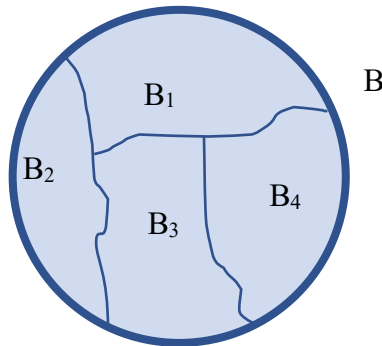


Probabilidad Total

Se dice que un suceso está particionado, cuando cada uno de los sucesos que lo conforman es mutuamente excluyente con cualquiera de los demás y la unión de todas esas partes me dan el suceso original:



$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

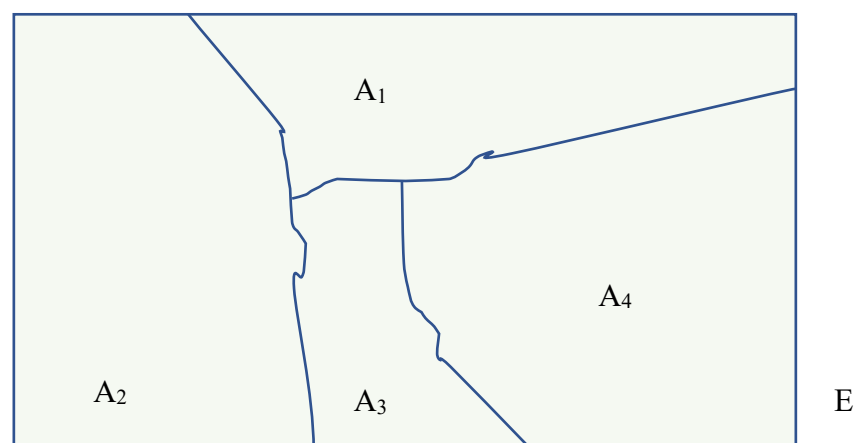
Son mutuamente excluyentes o incompatibles

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{Para todo } i \neq j$$

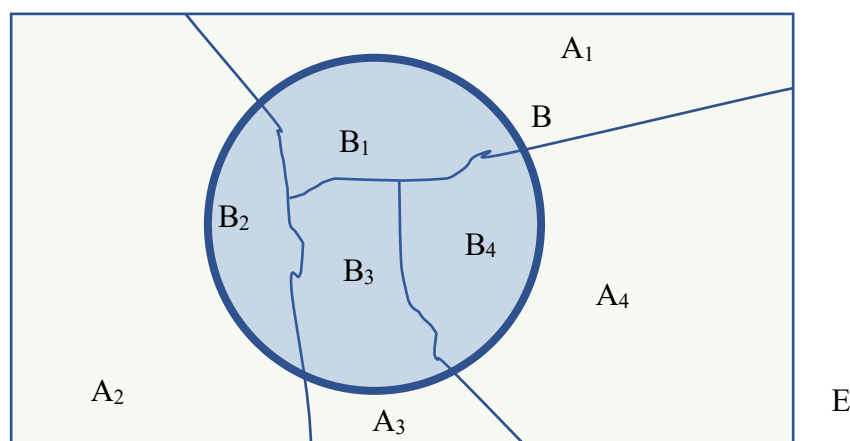
Si ahora tomáramos la partición de un Espacio Muestral con los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que cumplen que:

1. Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro, $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$

Tendremos:



Si sobre este Espacio Muestral particionado tenemos un suceso B, al mismo lo podemos visualizar:



Como $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ y $B_1 = B \cap A_1, B_2 = B \cap A_2, B_3 = B \cap A_3, B_4 = B \cap A_4$,

Podemos indicar que $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$ (1)

Pero como hemos visto en la clase anterior con la ecuación de probabilidad condicionada:

$$P(B/A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(B/A_i) \cdot P(A_i) \quad (2)$$

Por consiguiente, la ecuación (1) podemos escribirla de la siguiente forma:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)]$$

Teniendo en cuenta que estamos uniendo sucesos mutuamente excluyentes, y lo visto en la ecuación (2), nos quedará:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) + P(B/A_4) \cdot P(A_4)$$

A esta ecuación se la conoce como **Teorema de la Probabilidad Total**.

El **Teorema de la Probabilidad Total** nos permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas:

Ejemplo: Supongamos que si llueve la probabilidad de que ocurra un accidente es $x\%$ y si hace buen tiempo dicha probabilidad es $y\%$. Este teorema nos permite deducir cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente si conocemos la probabilidad de que llueva y la probabilidad de que haga buen tiempo.

Entonces, sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos, o sea conforman a un Espacio Muestral particionado, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Ejercicio:

Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10%

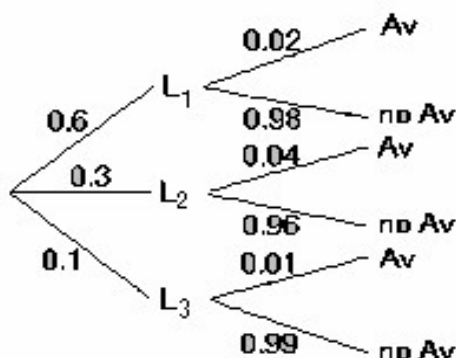
cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Solución:

El suceso "sufrir una avería" (Av) puede producirse en las tres líneas, (L_1, L_2, L_3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

$$P(Av) = P(L_1) \cdot P(Av/L_1) + P(L_2) \cdot P(Av/L_2) + P(L_3) \cdot P(Av/L_3) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.012 + 0.012 + 0.001 = 0.025$$

Usando un diagrama de árbol de decisión, podemos visualizar claramente las distintas alternativas y las probabilidades asociadas:

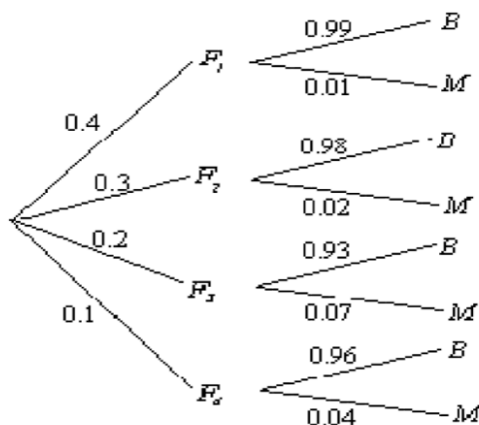


Ejercicio:

Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F_1, F_2, F_3 y F_4 . El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Solución:

Llamando al suceso M = "producto defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades volcadas al diagrama de árbol de decisión adjunto, tenemos:



$$P(M) = P(F_1) \cdot P(M/F_1) + P(F_2) \cdot P(M/F_2) + P(F_3) \cdot P(M/F_3) + P(F_4) \cdot P(M/F_4) =$$

$$\frac{1}{4} = 0.4 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04 = 0.004 + 0.006 + 0.014 + 0.004 = 0.028$$

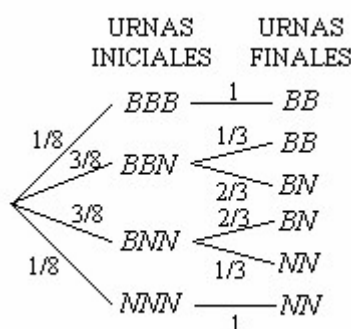
Ejercicio:

Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en la urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra?

Solución:

Llamamos a los sucesos B = "obtener bola blanca" y N = "obtener bola negra". En el diagrama de árbol de decisión pueden verse las configuraciones posibles de las urnas después del lanzamiento de las monedas y las urnas finales, así como las probabilidades para cada una de ellas. Atendiendo a la notación expresada en el diagrama de árbol y según el teorema de la probabilidad total, se obtiene:

$$P(BN) = P(BN \cap BBN) + P(BN \cap BNN) = P(BBN) \cdot P(BN/BBN) + P(BNN) \cdot P(BN/BBN) = \\ = 3/8 \cdot 2/3 + 3/8 \cdot 2/3 = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

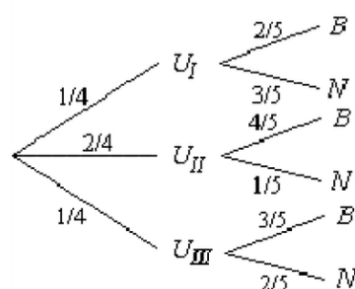
**Ejercicio:**

Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna I, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de una urna II, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna III, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola blanca después de lanzar las dos monedas al aire?

Solución:

El diagrama de árbol de decisión muestra, primero, las probabilidades correspondientes a la elección de la urna y, después, a la extracción de la bola. La probabilidad total de sacar bola blanca la calculamos recorriendo todas las ramas que terminan en el suceso B "sacar bola blanca".

$$P(B) = P(B/U_I) \cdot P(U_I) + P(B/U_{II}) \cdot P(U_{II}) + P(B/U_{III}) \cdot P(U_{III}) = 1/4 \cdot 2/5 + 2/4 \cdot 4/5 + 1/4 \cdot 3/5 = 13/20$$



Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de **Teorema de Bayes**.

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. entonces la probabilidad $P(A_i/B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

En los problemas relacionados con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicionada, así como con la probabilidad total y el teorema de Bayes, es aconsejable que, con la información del problema, construyas un diagrama de árbol de decisión (una alternativa es construir un Tabla de contingencias. que mostraremos al final de este escrito).

Ejercicio:

Tres máquinas, A , B y C , producen el 45%, 30% y 25% respectivamente del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de cada una de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%, también respectivamente.

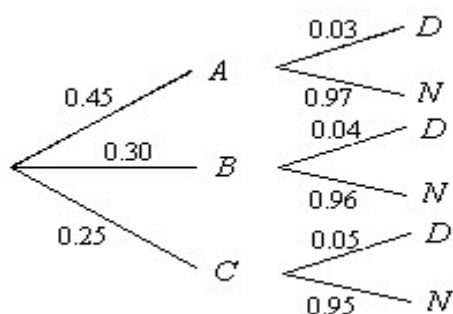
- Seleccionamos una pieza al azar: calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
- Tomamos al azar una pieza y resulta ser defectuosa: calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina B .
- ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución:

Sea D = "la pieza es defectuosa" y N = "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol de decisión adjunto.

- Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, $P(D)$, por la propiedad de la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.038$$



- Debemos calcular $P(B/D)$. Por el teorema de Bayes,

$$P(B/D) = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0.30 \cdot 0.04}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05} = \frac{12}{38} = 0.316$$

- c. Calculamos $P(A/D)$ y $P(C/D)$, comparándolas con el valor de $P(B/D)$ ya calculado. Aplicando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(A/D) = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05} = \frac{135}{380} = 0.355$$

$$P(C/D) = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05} = \frac{125}{380} = 0.329$$

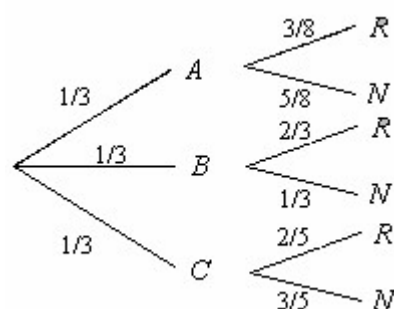
Comparando las distintas probabilidades, la máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es A.

Ejercicio:

Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Solución:

Llamamos a los sucesos R = "sacar bola roja" y N = "sacar bola negra". En el diagrama de árbol de decisión adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R o N para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es $P(A/R)$. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R) = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173} = 0.260$$

Tabla de contingencia

Una tabla de contingencia es una de las formas más comunes de resumir datos de distintas categorías para su análisis posterior. En general, el interés se centra en analizar las relaciones entre una causa (asociada a una fila) y una consecuencia asociadas a una columna. De manera formal, se consideran dos variables (x e y) que tienen i y j alternativas, respectivamente. Una observación puede acabar clasificada en una de las posibles $i \times j$ alternativas.

Cuando las casillas de la tabla contienen las frecuencias observadas, la tabla se denomina tabla de contingencia, término que fue introducido por Karl Pearson en 1904. Una tabla de contingencia con i filas y j columnas se denomina una tabla $i \times j$.

Ejemplo:

Por ejemplo, se considera la distribución conjunta de dos variables y la correspondiente tabla de contingencia en una muestra de pacientes de un hospital. En esta tabla se ha volcado las frecuencias de ataques al corazón (mortal o no) respecto a un tratamiento basado en la toma diaria de aspirinas o de un placebo. En efecto, el estudio realizado consistió en que para dos grupos de pacientes relativamente similares en tamaño, uno fue medicado con aspirinas y otro con un “placebo”, elemento que no cambiaba su riesgo “natural” frente a ataques cardíacos.

Así podemos identificar la variable $X \equiv$ Tomar aspirina o tomar un placebo de efecto nulos (o sea, $i = 2$). Por otro lado, la consecuencia de esas acciones es $Y \equiv$ Sufrir un ataque cardíaco mortal, sufrir un ataque no mortal o no sufrir ningún ataque (o sea, $j = 3$) durante el periodo estudiado.

	Ataque mortal	Ataque no mortal	Sin ataque	Cantidad pacientes
Tomar Placebo (P)	0,010	0,040	0,950	450
Tomar Aspirina (A)	0,002	0,019	0,979	500

Cargando las frecuencias relativas que surgen de analizar esa población al cabo de la duración del estudio, se puede calcular cuál es la probabilidad que un paciente que sufrió un ataque cardíaco mortal hubiera estado dentro de grupo que estaba medicado con una dosis diaria de aspirina.

Por lo que vimos del teorema de Bayes esa probabilidad es:

$$P(M/A) = \frac{500 \cdot 0,002}{500 \cdot 0,002 + 450 \cdot 0,01} = \frac{1}{5,5} = 0,1818$$