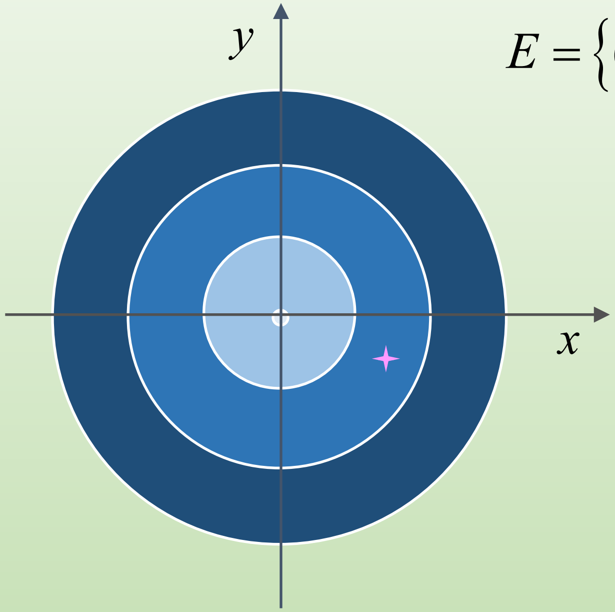
VARIABLE ALEATORIA DISCRETA – Ejemplos
Función de probabilidad puntual y valores esperados

UNIDAD 3 – PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

FACULTAD REGIONAL HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Experimento aleatorio: Se efectúa un tiro al blanco en un disco de un 30 cm de radio, separado en sectores circulares de igual centro (ver figura). Las marcas que definen las zonas interiores están en 20 cm, 10 cm y 2cm.



$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, 0 \le x^2 + y^2 \le 30^2\} \cup \{\text{exterior al disco}\}$$

Medidas geométricas en cm

v.a.c.

W: la distancia entre el punto de impacto en el disco y el centro (medida en cm)

$R_W : [0;30]$

v.a.d.

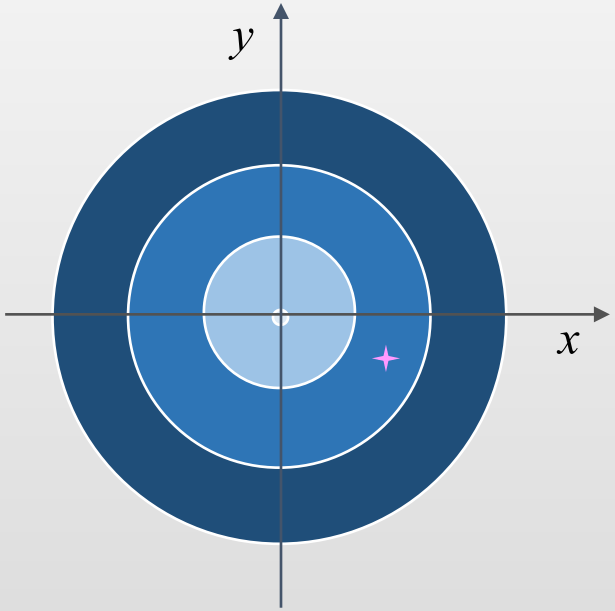
G: ganancia del jugador (en \$) de acuerdo a la tabla de valores por zonas

$$R_G = \{-100; 0; 15; 150; 900\}$$

Impacto en Zona 1
Impacto en Zona 2
Impacto en Zona 3
Impacto en Zona 4
El tiro impacta en el exterior del disco

Derecho a juego: $ 100
Premio Zona 1 (Círculo central blanco): $ 1000 (0≤r<2)
Premio Zona 2 (Sector Celeste): $ 250 (2≤r<10)
Premio Zona 3 (Sector Azul): $ 115 (10≤r<20)
Premio Zona 4 (Sector Azul Marino): $ 100 (20≤r≤30)

Experimento aleatorio: Se efectúa un tiro al blanco en un disco de un 30 cm de radio, separado en sectores circulares de igual centro (ver figura). Las marcas que definen las zonas interiores están en 20 cm, 10 cm y 2cm.



v.a.d.

G: ganancia del **jugador** (en \$) de acuerdo a la tabla de valores por zonas

¿Con cuál pericia?

$$R_G = \{-100; 0; 15; 150; 900\}$$

¿Cuál es la función de probabilidad puntual o distribución de probabilidad de G?

Supongamos un jugador con igual probabilidad de acierto dentro del disco que afuera, y que dentro del disco su disparo impacta en cualquier lugar por igual.

g	$P(G=g)=p(g)$
-100	
0	
15	¿?
150	
900	

¿$E(X)$?

Derecho a juego: \$ 100
Premio Zona 1 (Círculo central blanco): \$ 1000 ($0 \leq r < 2$)
Premio Zona 2 (Sector Celeste): \$ 250 ($2 \leq r < 10$)
Premio Zona 3 (Sector Azul): \$ 115 ($10 \leq r < 20$)
Premio Zona 4 (Sector Azul Marino): \$ 100 ($20 \leq r \leq 30$)

G: ganancia del **jugador** (en \$) de acuerdo a la tabla de valores por zonas $\quad R_G = \{-100; 0; 15; 150; 900\}$

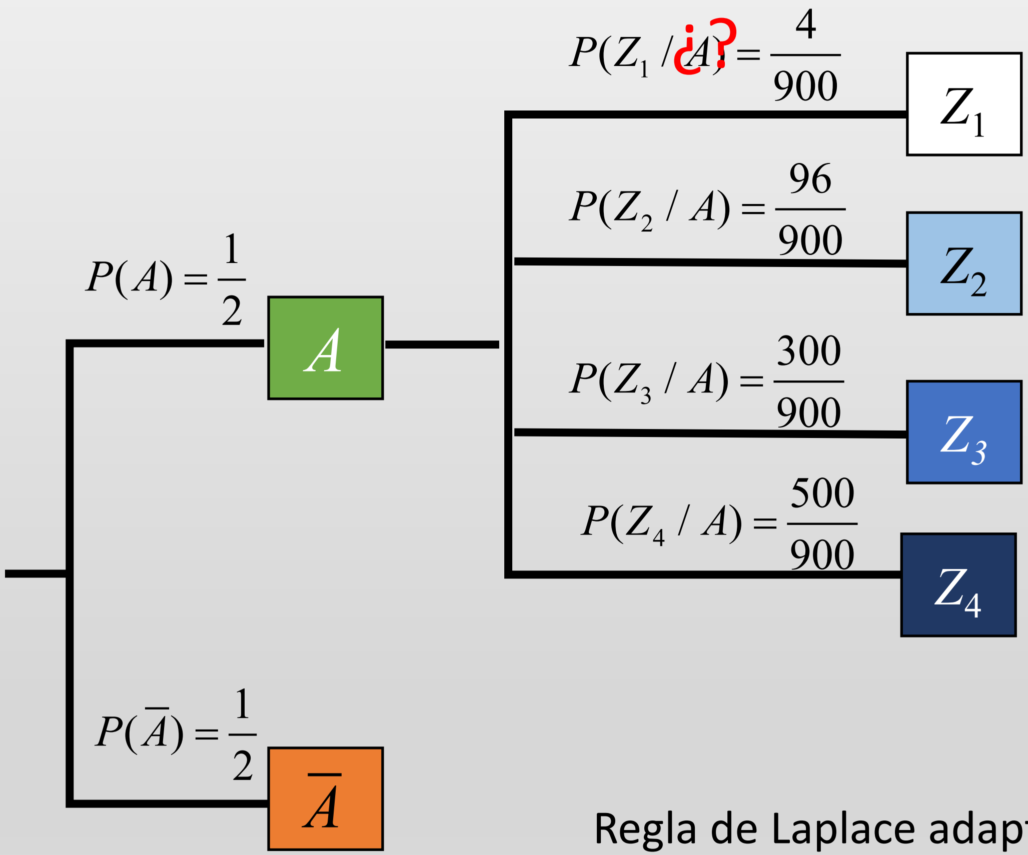
Jugador con igual probabilidad de acierto dentro del disco que afuera, y que dentro del disco su disparo impacta en cualquier lugar por igual.

Definición de eventos

A: el impacto del jugador da en el disco

Zi: el impacto del jugador da en la zona i

$i = 1;\ 2;\ 3; 4$



$$P(Z_1 / A) = \frac{\pi \cdot 2^2}{\pi \cdot 30^2}$$

$$P(Z_2 / A) = \frac{\pi \cdot (10^2 - 2^2)}{\pi \cdot 30^2}$$

$$P(Z_3 / A) = \frac{\pi \cdot (20^2 - 10^2)}{\pi \cdot 30^2}$$

$$P(Z_4 / A) = \frac{\pi \cdot (30^2 - 20^2)}{\pi \cdot 30^2}$$

Regla de Laplace adaptada a situaciones geométricas

$$P(Z_i / A) = \frac{\text{área de la zona } Z_i}{\text{área total del disco}}$$

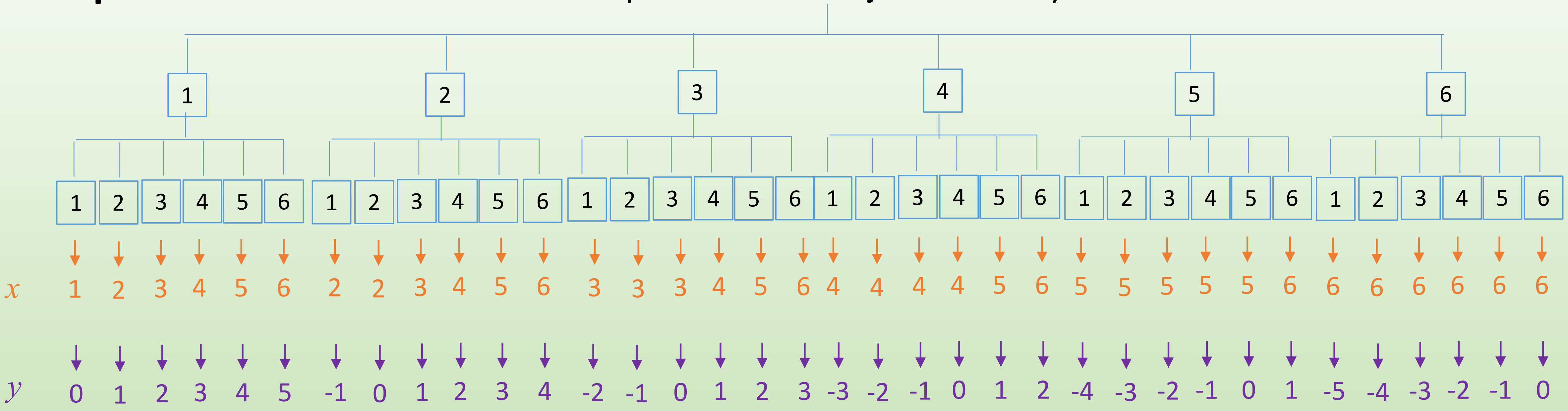
g	$P(G=g)=p(g)$
-100	$P\left(\overline{A}\right)=P(G=-100)=\frac{1}{2}$
0	$P(A\cap Z_4)=P(A)P(Z_4/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{500}{900}$
15	$P(A\cap Z_3)=P(A)P(Z_3/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{300}{900}$
150	$P(A\cap Z_2)=P(A)P(Z_2/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{96}{900}$
900	$P(A\cap Z_1)=P(A)P(Z_1/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{900}$

$$E(G)=-100\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{500}{900}+15\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{300}{900}+150\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{96}{900}+900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{900}=-37,5$$

Interpretación: Este <u>modelo de jugador</u> tiene una pérdida esperada de \$37,5 al hacer un tiro

$E(G^2)=8037,5 \quad V(G)=6631,25 \quad \sigma_G \cong 81,43$

Experimento aleatorio: Un dado equilibrado se arroja dos veces y se anota el resultado cada vez



X: el mayor de los números entre los dos resultados (si son iguales, el número obtenido) R_X= {1; 2; 3; 4; 5; 6}

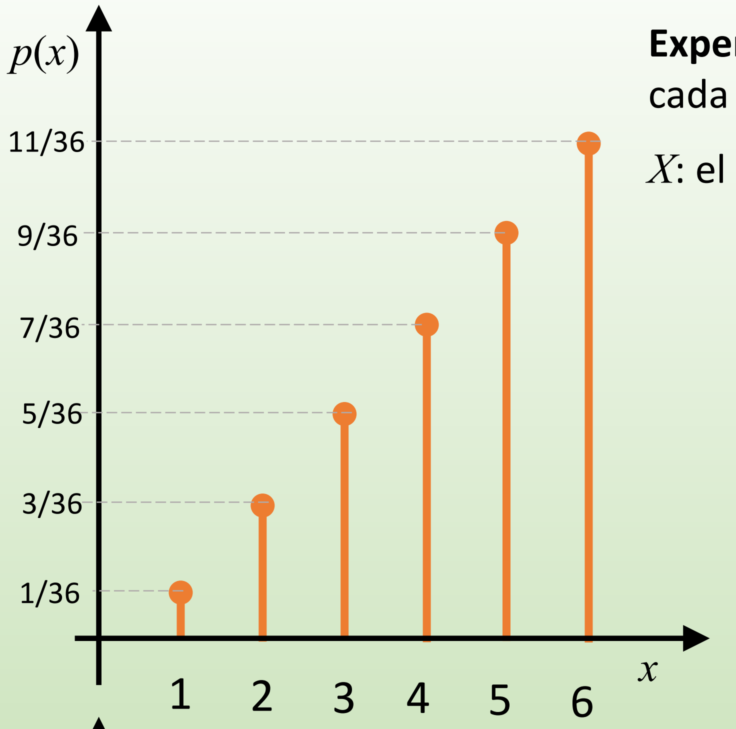
Y: la diferencia entre el segundo y el primero de los resultados obtenidos R_Y= {-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}

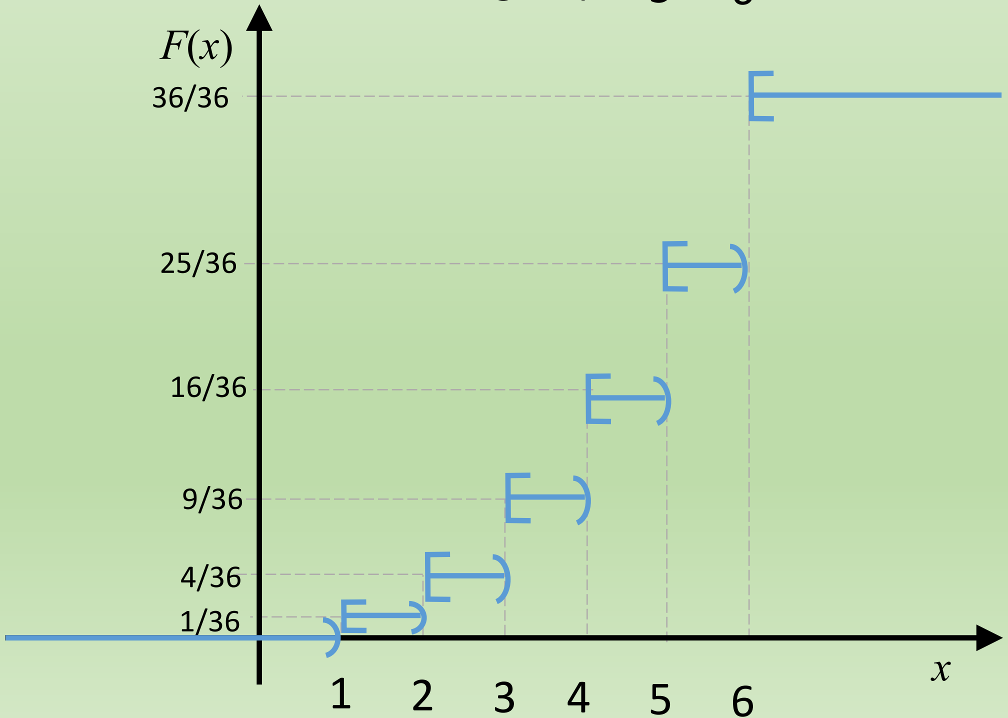
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Función de probabilidad puntual o distribución de probabilidad

y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

x	$P(X=x)$
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{11}{36}$





Experimento aleatorio: Un dado equilibrado se arroja dos veces y se anota el resultado cada vez

X: el mayor de los números entre los dos resultados (si son iguales, el número obtenido)

Función de probabilidad puntual o distribución de probabilidad

$$P(X=x)=p(x)=\frac{2x-1}{36}$$

$$x=1;2;3;4;5,6$$

- $0\le p(x)\le 1 \quad \forall x\in R_X$
- $\sum_{x\in R_X} p(x)=1$

Sumar

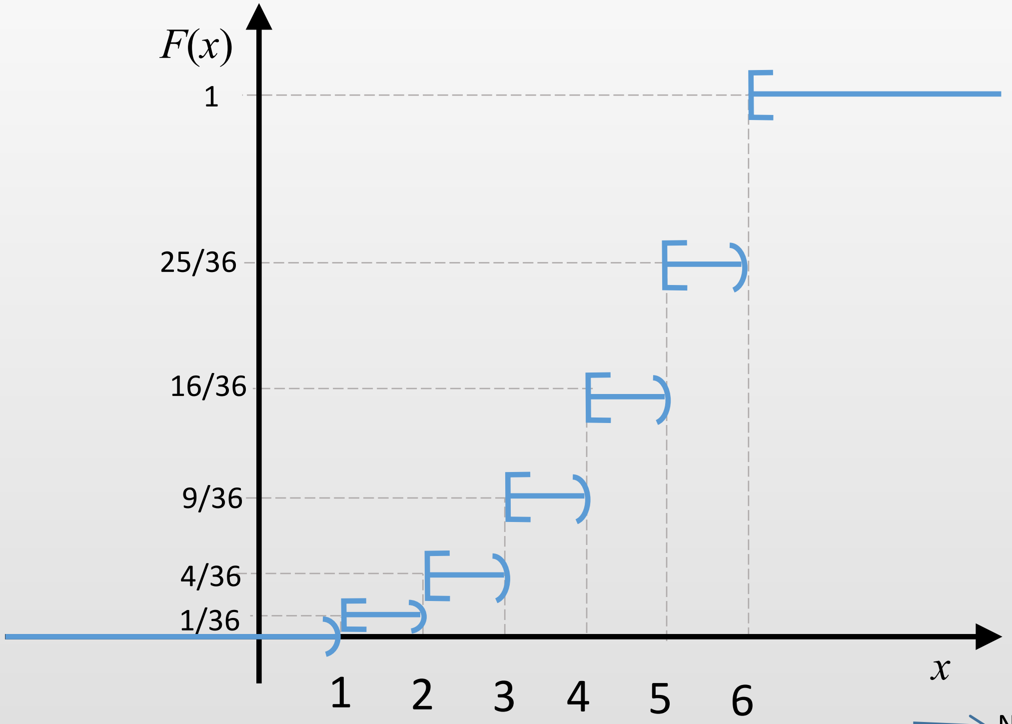
Restar

Función de distribución o función de probabilidad acumulada

$$F_X:\mathbf{R}\to[0;1] \;/\; F_X(t)=P\left(X\le t\right)=\sum_{x\in R_X,\,x\le t} p(x)$$

$$F_X(x)\equiv\begin{cases}0 & x<1\\ 1/36 & 1\le 1<2\\ 4/36 & 2\le 1<3\\ 9/36 & 3\le x<4\\ 16/36 & 4\le x<5\\ 25/36 & 5\le x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}$$

Función de distribución o función de probabilidad acumulada



$$F_X(x) \equiv \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/36 & 1 \le 1 < 2 \\ 4/36 & 2 \le 1 < 3 \\ 9/36 & 3 \le x < 4 \\ 16/36 & 4 \le x < 5 \\ 25/36 & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

$P(X=4) = F_X(4) - F_x(3)$

$p(4) = 5/36$

$F_X(4^+) - F_x(4^-) = 16/36 - 9/36$

$P(X=4,7) = F_X(4,7) - F_x(4)$

$p(4,7) = 0$

$F_X(4,7^+) - F_x(4,7^-) = 16/36 - 16/36$

$P(X=a) = F_X(a^+) - F_x(a^-)$

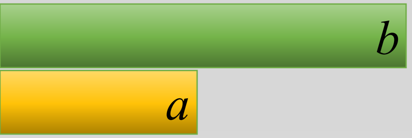
$a \in \mathbf{R}$

Número de recorrido anterior a 2

$P(2 < X \le 5) = F_X(5) - F_x(2)$

$p(3)+p(4)+p(5) = 21/36$

$F_X(5^+) - F_x(2^+) = 25/36 - 4/36$



$P(a < X \le b) = F_X(b^+) - F_x(a^+)$

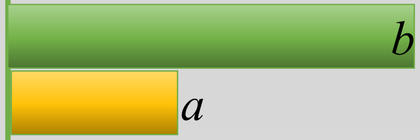
$a < b$

$F_X(b)$ $F_X(a)$

$P(2 \le X \le 5) = F_X(5) - F_x(1)$

$p(2)+p(3)+p(4)+p(5) = 24/36$

$F_X(5^+) - F_x(2^-) = 25/36 - 1/36$



$P(a \le X \le b) = F_X(b^+) - F_x(a^-)$

$a < b$

F_X en el valor del recorrido anterior a a

$P(2 \le X < 5) = F_X(4) - F_x(1)$

$p(2)+p(3)+p(4) = 15/36$

$F_X(5^-) - F_x(2^-) = 16/36 - 1/36$

$P(a \le X < b) = F_X(b^-) - F_x(a^-)$

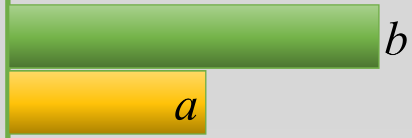
$a < b$

F_X en el valor del recorrido anterior a b

$P(2 < X < 5) = F_X(4) - F_x(2)$

$p(3)+p(4) = 12/36$

$F_X(5^-) - F_x(2^+) = 16/36 - 4/36$



$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_x(a^+)$

$a < b$

Experimento aleatorio: Un dado equilibrado se arroja dos veces y se anota el resultado cada vez

X: el mayor de los números entre los dos resultados (si son iguales, el número obtenido)

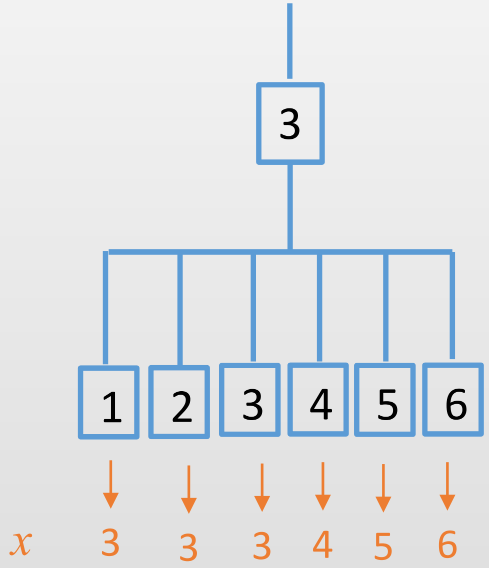
A: el primer resultado obtenido es un 3

$$P(X \leq 4 / A) = \frac{P\left[(X \leq 4) \cap A\right]}{P(A)}$$

$$P\left[(3,1) \cup (3,2) \cup (3,3) \cup (3,4)\right] = 4 \cdot (1/36)$$

$$P(X \leq 4 / A) = \frac{\boxed{\frac{4}{36}}}{\boxed{\frac{1}{6}}} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$P\left[(3,1) \cup (3,2) \cup (3,3) \cup (3,4) \cup (3,5) \cup (3,6)\right] = 6 \cdot (1/36)$$



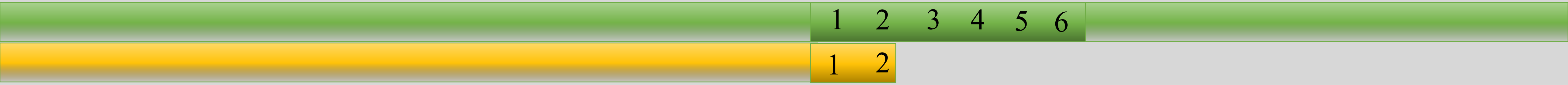
$$P(X \leq 4 / A) = \frac{4}{6}$$

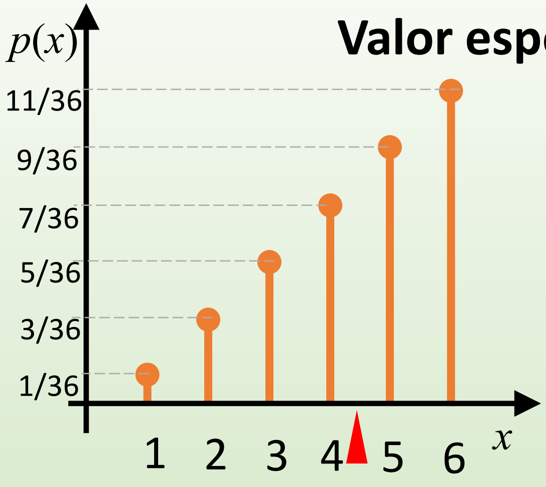
Experimento aleatorio: Un dado equilibrado se arroja dos veces y se anota el resultado cada vez

X: el mayor de los números entre los dos resultados (si son iguales, el número obtenido)

$$P(X \leq 5 / X > 2) = \frac{P\left[(X \leq 5) \cap (X > 2)\right]}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X \leq 5)}{1 - P(X \leq 2)}$$

$$P(X \leq 5 / X > 2) = \frac{F(5) - F(2)}{1 - F(2)}$$





Valor esperado o esperanza de la v.a.d. X: $E(X)=\mu_X=\sum_{x\in R_X}\left[x\cdot p(x)\right]$ $\min\{R_x\}\leq E(X)\leq MAX\{R_X\}$

$$E(X)=\mu_X=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}\quad(\cong 4,472)$$

Valor esperado o esperanza de la v.a.d. X^2: $E\left[h(X)\right]=\sum_{x\in R_X}\left[h(x)\cdot p(x)\right]$

$$E(X^2)=\mu_X=1^2\cdot\frac{1}{36}+2^2\cdot\frac{3}{36}+3^2\cdot\frac{5}{36}+4^2\cdot\frac{7}{36}+5^2\cdot\frac{9}{36}+6^2\cdot\frac{11}{36}=\frac{791}{36}\quad(\cong 21,972)$$

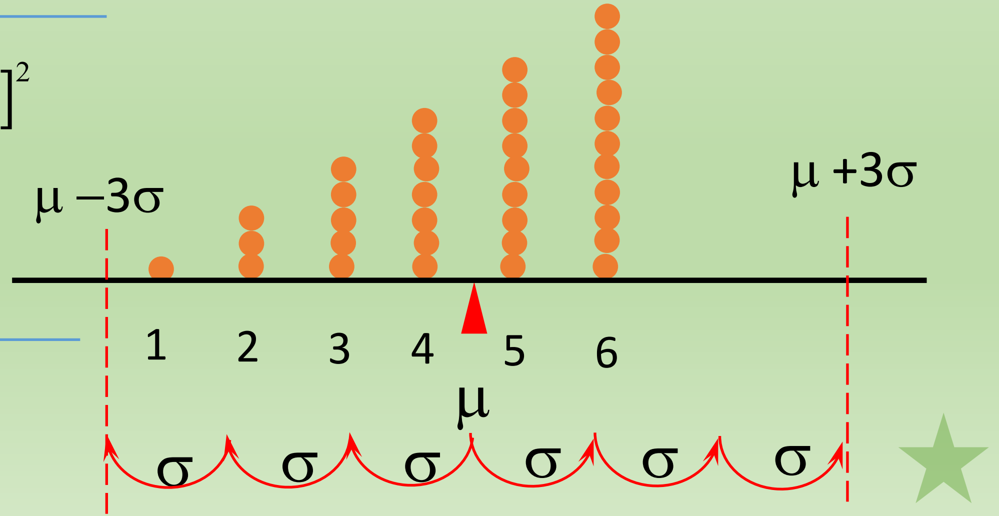
Varianza o variancia de X: $V(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\sum_{x\in R_X}\left[(x-\mu_X)^2\cdot p(x)\right]$

$$V(X)=\sigma_X^2=\left(1-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(2-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36}+\left(3-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{5}{36}+\left(4-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{7}{36}+\left(5-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{9}{36}+\left(6-\frac{161}{36}\right)^2\cdot\frac{11}{36}=\frac{2555}{1296}$$

Forma abreviada de calcular al varianza: $V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$V(X)=\frac{791}{36}-\left(\frac{161}{36}\right)^2=\frac{2555}{1296}$$

Desvío estándar de X $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$ $\sigma_X=\sqrt{\frac{2555}{1296}}\cong 1,404$

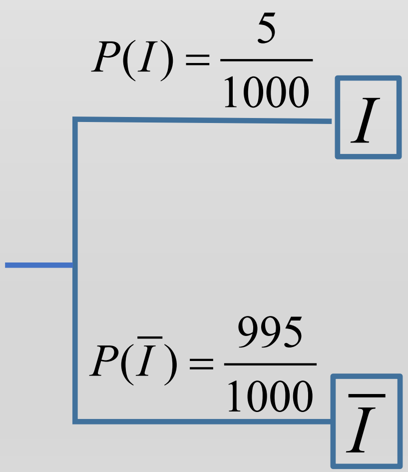


Establecer la cuota de un seguro

Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de \$60000 por incendios provocados por desperfectos eléctricos en hogares de una zona urbana. Cuenta con la información, en base a datos estadísticos de la zona, de que ocurren 5 de estos incendios por cada mil hogares en el año y que en un mismo año los incendios no se repiten en un mismo hogar. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia (en \$) de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de tales seguros.

La compañía conseguirá el objetivo planteado si pone un valor tal a la cuota (c en \$) para que la ganancia esperada por hogar sea no negativa, esto es $E(X) \geq 0$

I: Se produce el incendio



X	$P(X = x) = p(x)$
$12 \cdot c - 60000$	$\frac{5}{1000}$
$12 \cdot c$	$\frac{995}{1000}$

$$E(X) = (12 \cdot c - 60000) \cdot \frac{5}{1000} + 12 \cdot c \cdot \frac{995}{1000} = 12c - 300$$

$$12 \cdot c - 300 \geq 0 \Rightarrow c \geq 25$$

Rta. La compañía debe cobrar al menos \$25 por mes.

Propiedades valor esperado y varianza

Sea X una v.a.d. con recorrido R_X, $P(X = x) = p(x)\ \ x \in R_X$, valor esperado $E(X)$ y desvío estándar σ_X. Se propone la transformación $Y = aX + b$ con $a > 0$. ¿Cuánto deben valer las constantes a y b para que $E(Y) = 0$ y $\sigma_Y = 1$?

X v.a.d $\qquad R_X = \{x_i\}_{i=1}^{n} \qquad R_X = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\} \qquad P(X = x_i) = p(x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} [x \cdot p(x)] = \sum_{i=1}^{n} [x_i p(x_i)] \qquad V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} [(x - \mu_X)^2 \cdot p(x)] = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - \mu_X)^2 p(x_i)]$$

$$Y = aX + b \Rightarrow y_i = ax_i + b \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad R_Y = \{y_1 = ax_1 + b; y_2 = ax_2 + b; \cdots; y_n = ax_n + b\}$$

$$P(Y = y_i) = p(y_i) = p(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_{i=1}^{n} [y_i p(y_i)] = \sum_{i=1}^{n} [(ay_i + b) p(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} [ax_i p(x_i)] + \sum_{i=1}^{n} [bp(x_i)] = a \underbrace{\sum_{i=1}^{n} [x_i p(x_i)]}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_{i=1}^{n} [p(x_i)]}_{1} = a\mu_X + b$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \mu_Y)^2 \cdot p(y_i)] = \sum_{i=1}^{n} \{[(ax_i + b) - (a\mu_X + b)]^2 \cdot p(x_i)\} = \sum_{i=1}^{n} \{[a(x_i - \mu_X)]^2 \cdot p(x_i)\} = \sum_{i=1}^{n} [a^2 (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)]$$

$$V(Y) = a^2\, V(X) \Rightarrow \sigma_Y = |a| \sigma_X$$

$$Y = aX + b \qquad a > 0$$

$$\begin{cases} E(Y) = a\mu_X + b = 0 \\ V(Y) = a^2 V(X) \Rightarrow \sigma_Y = |a|\sigma_X = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\mu_X + b = 0 \longrightarrow b = -a\mu_X \\ a\sigma_X = 1 \xrightarrow{\sigma_X > 0} a = \dfrac{1}{\sigma_X} \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{\mu_X}{\sigma_X}$$

$$\boxed{Y = \frac{(X - \mu_X)}{\sigma_X}} \quad \begin{cases} E(Y) = 0 \\ V(Y) = 1^2 \end{cases}$$

Estandarización de la variable