

PROBABILIDAD

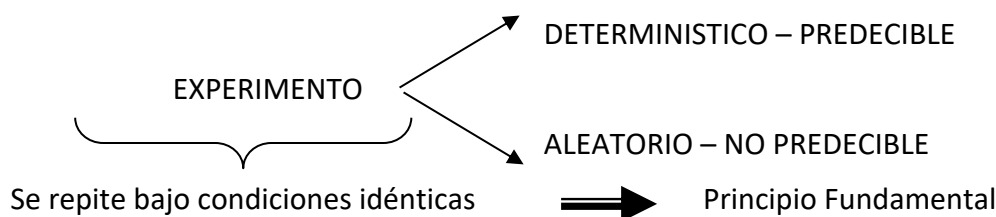
EXPERIMENTOS ALEATORIOS - ESPACIOS MUESTRALES

Un experimento es cualquier acción o proceso que genera observaciones. En general se asocia el término experimento a situaciones de pruebas de laboratorios, planeadas y controladas. Esto se debe a que es el principio fundamental de toda ciencia efectuar experimentos para analizar los resultados, pero los experimentos deben ser efectuados bajo **condiciones idénticas**. Aun cuando el término se lo asocia a laboratorios, nosotros usaremos la palabra experimento en un sentido más amplio.

Por lo tanto, un experimento podría ser cualquiera de las siguientes situaciones:

- Lanzar al aire una moneda, una o varias veces.
- Seleccionar cartas de una baraja hasta que salga un tres.
- Pesar piezas de pan.
- Averiguar el tiempo empleado en el viaje desde casa al campus.
- Medir la resistencia del material de una viga.

Cuando en un experimento el resultado no se puede predecir con certeza decimos que es un experimento o fenómeno aleatorio. Cuando el resultado no depende del azar sino que se puede determinar a ciencia cierta decimos que el experimento es determinístico. Por ello los experimentos se pueden dividir en:



Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una *experiencia determinista*. Si echamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una *experiencia aleatoria*.

Experimentos o fenómenos aleatorios son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.

La vida cotidiana está plagada de sucesos aleatorios. Muchos de ellos, de tipo sociológico (viajes, accidentes, número de personas que acudirán a un gran almacén o que se matricularán en una carrera...) aunque son suma de muchas decisiones individuales, pueden ser estudiados, muy ventajosamente, como aleatorios.

A la colección de resultados que se obtiene en los experimentos aleatorios se le llama **espacio muestral**. **Espacio muestral** es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Los espacios muestrales suelen designarse con la letra S y los resultados con letras, números, puntos, símbolos, etc. que permitan identificar las distintas opciones.

Por ejemplo: Tiramos un único dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Dejamos caer una moneda $S = \{C, X\}$

Suceso aleatorio es un acontecimiento que ocurrirá o no, dependiendo del azar.

El azar está relacionado con el desconocimiento. Pensemos en un proceso industrial que produce grandes cantidades de un artículo determinado. No todos los artículos producidos son idénticos, cada artículo puede calificarse como "bueno" o "defectuoso". Si de toda la producción se escoge un artículo "a ciegas", ese artículo puede resultar bueno o defectuoso. Esta es una situación azarosa o *aleatoria* pues no sabemos si el artículo seleccionado es defectuoso. Claro que con experiencia en el proceso es posible cuantificar de una manera numérica qué tan factible es que el artículo sea defectuoso o no.

Hay otro concepto asociado al azar y es el de incertidumbre. Si estamos contemplando invertir una cantidad de dinero, el retorno sobre la inversión puede ser fijo, como en el caso de una cuenta en un banco con interés fijo; o variable si la inversión la hacemos en una empresa. El negocio puede resultar desde un gran éxito hasta un fracaso, es decir, la ganancia no es fija, sino que depende del éxito a obtener. Si no podemos evaluar qué tan factible es cada monto posible de la ganancia, tenemos una situación de *incertidumbre*. Por el contrario, si podemos tener una idea de qué tan probables son los diferentes resultados y entonces tendremos una situación de *riesgo*. Esta última es la que llamamos aleatoria o azarosa.

Experimentos Aleatorios y determinísticos: es común utilizar expresiones como:

- Si suelto una manzana, se cae
- Si el radio es de 2m la longitud de la circunferencia es de 12,56m
- Si se duplica el radio de la circunferencia, se duplica su longitud.
- Si coloco un corcho en un recipiente con agua, el corcho flota.

Pero no es frecuente escuchar:

- En la próxima jugada de la lotería el premio mayor terminará en 3.
- EL 9 de julio se registrará una temperatura bajo cero.
- Seguramente se venderán 1.000.000 de discos de esta canción.
- Mañana lloverá.

En general se modifican las frases por las siguientes

- **Es probable que** en la próxima jugada de la lotería el premio mayor terminará en 3.
- **Existe la probabilidad de que** el 9 de julio se registrará una temperatura bajo cero.
- **Probablemente** se venderán 1.000.000 de discos de esta canción.
- Para mañana se anuncia una **probabilidad** de lluvia.

Resumiendo: un Experimento Aleatorio es aquél que puede ser repetido bajo "las mismas condiciones", del que puede establecerse el conjunto de sus posibles resultados, pero no predecir un resultado concreto.

Espacio muestral: conjunto de posibles resultados.

Punto muestral: elemento del espacio muestral.

Suceso: cualquier subconjunto del espacio muestral.

Suceso Elemental: suceso que tiene como elemento un resultado posible.

Si representamos el espacio muestral por S y a los sucesos por A : entonces $A \subset S$. Dado que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto ($\emptyset \subset S$) y que todo conjunto es subconjunto de sí mismo ($S \subset S$), tanto el conjunto vacío como el espacio muestral también son sucesos.

Un problema para tener en cuenta es que, dado un experimento, **podemos encontrar más de un espacio muestral**.

Ejemplo: Una mujer portadora de hemofilia tiene 3 hijos ¿Cuál es el espacio muestral apropiado para estudiar la posible hemofilia de estos?

Opción a: Cada hijo puede padecer hemofilia (s) o no (n), por lo tanto:

$$S_1 = \{sss, ssn, sns, nss, snn, nsn, nns, nnn\}$$

Donde, por ejemplo, 'sns' significa el primero y el tercero la padecen y el segundo no. Hay que asegurarse que no se olvida ninguno.

En este espacio muestral, el suceso "dos hijos padecen hemofilia" se representa como:

$$A_1 = \{ssn, sns, nss\} \text{ y el suceso "los dos primeros no la padecen" como } A_2 = \{nns, nnn\}$$

Opción b: Pueden padecer hemofilia los tres hijos (3), dos (2), ... , etc.

$$S_2 = \{3, 2, 1, 0\}$$

En este espacio muestral, el suceso "dos hijos padecen hemofilia" es $A_1 = \{2\}$ y el suceso "los dos primeros no la padecen" no se puede representar porque en el espacio muestral no está contemplado el orden.

Antes de definir el término probabilidad y calcular las probabilidades de un experimento aleatorio hay que definir una serie de conceptos:

Suceso elemental: hace referencia a cada una de las posibles soluciones que se pueden presentar. Un elemento posible.

Ejemplo: al lanzar una moneda al aire, los sucesos elementales son la cara y la cruz. Al lanzar un dado, los sucesos elementales son el 1, el 2, ..., hasta el 6.

Suceso compuesto: es un subconjunto de sucesos elementales.

Ejemplo: lanzamos un dado y queremos que salga un número par. El suceso "numero par" es un suceso compuesto, integrado por 3 sucesos elementales: el 2, el 4 y el 6

O, por ejemplo, jugamos a la ruleta y queremos que salga "menor o igual que 18". Este es un suceso compuesto formado por 18 sucesos elementales (todos los números que van del 1 al 18).

Al conjunto de todos los posibles sucesos elementales lo denominamos **espacio muestral**. Cada experimento aleatorio tiene definido su espacio muestral (es decir, un conjunto con todas las soluciones posibles).

Ejemplo: si tiramos una moneda al aire una sola vez, el espacio muestral será cara o cruz.

Si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire dos veces, entonces el espacio muestral estará formado por (cara-cara), (cara-cruz), (cruz-cara) y (cruz-cruz).

Relación entre sucesos

Entre los sucesos compuestos se pueden establecer distintas relaciones:

a) Un suceso puede estar contenido en otro: las posibles soluciones del primer suceso también lo son del segundo, pero este segundo suceso tiene además otras soluciones suyas propias.

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Vemos que el suceso a) está contenido en el suceso b).

Siempre que se da el suceso a) se da el suceso b), pero no al contrario. Por ejemplo, si el resultado fuera el 2, se cumpliría el suceso b), pero no el a).

b) Dos sucesos pueden ser iguales: esto ocurre cuando siempre que se cumple uno de ellos se cumple obligatoriamente el otro y viceversa.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que salga múltiplo de 2. Vemos que las soluciones coinciden en ambos casos.

c) Unión de dos o más sucesos: la unión será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se unen.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estará formado por el 2, el 4, el 5 y el 6.

d) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de dos o más sucesos que se intersectan.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire, y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que sea mayor que 4. La intersección de estos dos sucesos tiene un sólo elemento, el número 6 (es el único resultado común a ambos sucesos: es mayor que 4 y es número par).

e) Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden dar al mismo tiempo ya que no tienen elementos comunes (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6. Es evidente que ambos no se pueden dar al mismo tiempo.

f) Sucesos complementarios: son aquellos en los que, si no se da uno, obligatoriamente se tiene que dar el otro.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número par, y b) que salga un número impar. Vemos que, si no se da el primero, se da el segundo (y viceversa).

Ejercicio:

Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

- Lanzar tres monedas.
- Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
- Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
- El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.
- Lanzar una moneda hasta que salga una cara.

Solución:

- Llamando C a obtener cara y X a la obtención de cruz, obtenemos el siguiente espacio muestral: $S=\{(CCC),(CCX),(CXC),(XCC),(CXX),(XCX),(XXC),(XXX)\}$
- $S=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$
- Llamando B a sacar bola blanca y N a sacar bola negra, tenemos: $S=\{BB,BN,NN\}$
- Si llamamos L al día lluvioso y N al día sin lluvia, para tres días consecutivos se obtiene el siguiente espacio muestral: $S=\{(LLL),(LLN),(LNL),(NLL),(LNN),(NLN),(NNL),(NNN)\}$
- Llamando C a obtener cara y X a la obtención de cruz, obtenemos el siguiente espacio muestral: $S=\{(C),(XC),(XXC),(XXXC),(XXXXC),(XXXXXC),(XXXXXXC),...\}$

Más ejemplos:

- Si en una caja hay 10 manzanas y 2 están echadas a perder (¡al menos en este momento!), al extraer tres manzanas y ver cuantas son buenas podemos obtener 1, 2 o 3 buenas (¡0 buenas es imposible!). De modo que en este ejemplo el espacio muestral es: $\{1, 2, 3\}$.
- Si un juego consiste en tirar todos los volados que hagan falta hasta obtener tres águilas seguidas o hasta que sean 15 volados, si nos fijamos en el número de volados requeridos, el espacio muestral es: $\{3, 4, 5, \dots, 15\}$. Pero si nos fijáramos en el número de *soles* que resultan, entonces el espacio muestral es: $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$.

Es claro que para determinar el espacio muestral en un experimento aleatorio es necesario entender perfectamente:

- Qué se va a hacer.
- Qué se va a observar o contar.

Veamos ahora un ejemplo de suceso y de espacio muestral: Al comprar llantas para el auto, puede ser que manifiesten un defecto de fabricación dentro del período de garantía total y que el fabricante deba reponerlas. También puede pasar que el defecto se manifieste en el período de garantía parcial y que el fabricante bonifique sólo un porcentaje o que el defecto se manifieste después de vencido el período de garantía en cuyo caso el fabricante no paga nada. También puede pasar que las llantas no tengan defecto de fabricación aparente y que no haya garantía que reclamar. (Nota: Como se puede considerar que las llantas que me vendieron se escogieron al azar de entre toda la producción, tenemos un experimento aleatorio).

El espacio muestral en este experimento es: $S = \{T, P1, P2, P3, N, OK\}$. Con la siguiente notación T: pago total, P1 pago del 50%, P2: pago del 30%, P3: pago del 10%, N: nada de pago, OK: llantas sin defecto. El evento $\{OK\}$ sólo se da cuando las llantas no tienen defecto.

En este último ejemplo se tiene un **evento simple** porque consta de un solo punto del espacio muestral (Será **compuesto** cuando tenga varios puntos del espacio muestral). Se llama **evento imposible** al que no puede ocurrir; en este caso, corresponde al conjunto vacío. Otro evento extremo es el espacio muestral mismo que, puesto que siempre ocurre, se llama **evento seguro o cierto**.

Sucesos - Operaciones con Sucesos

El espacio muestral asociado al lanzamiento de tres dados y la suma de los puntos obtenidos es:

$S=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$ Podemos considerar algunos subconjuntos de S :

- Salir múltiplo de 5: $A=\{5,10,15\}$
- Salir número primo: $C=\{2,3,5,7,11,13,17\}$
- Salir mayor o igual que 12: $D=\{12,13,14,15,16,17,18\}$

Todos estos subconjuntos del espacio muestral S los llamamos **sucesos**. **Suceso** de un fenómeno o experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral S .

- Los elementos de S se llaman sucesos individuales o **sucesos elementales**.
- También son sucesos el suceso vacío o **suceso imposible**, $\emptyset$, y el propio E , **suceso seguro**.
- Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos **S** .
- Si E tiene un número finito, n , de elementos, el número de sucesos de E es 2^n .

Ejemplos:

- $\{1,2\}, \{2,4,6\}, \{3,5\}$ son sucesos. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots$, son sucesos individuales.
- En un dado hay $2^6 = 64$ sucesos.

En una moneda hay $2^2 = 4$ sucesos, que son: $\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C,X\}$ Es decir, $S=\{\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C,X\}\}$

Ejercicio:

Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Sea:

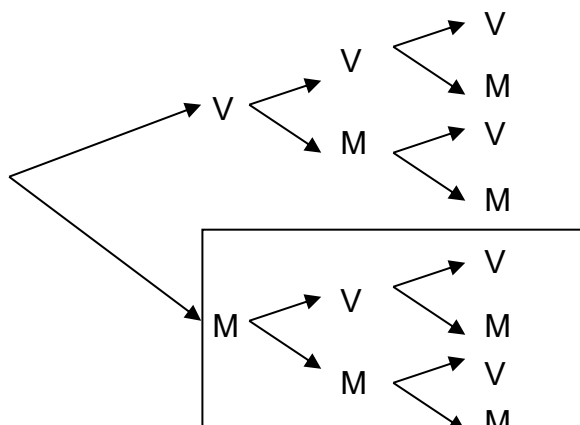
A el suceso *el hijo mayor es una mujer*, y

B el suceso *los dos hijos pequeños son varones*.

¿Cuáles son los elementos de A y B ?

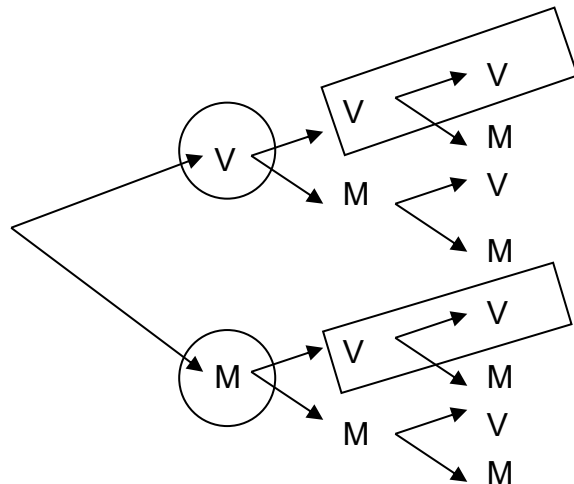
Solución:

Siendo **V** varón y **M** mujer, el espacio muestral está formado por los sucesos elementales:



Y los sucesos A y B son compuestos y están formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A = \{ (MMM), (MMV), (MVM), (MVV) \}$$



$$B = \{ (VVV), (MVV) \}$$

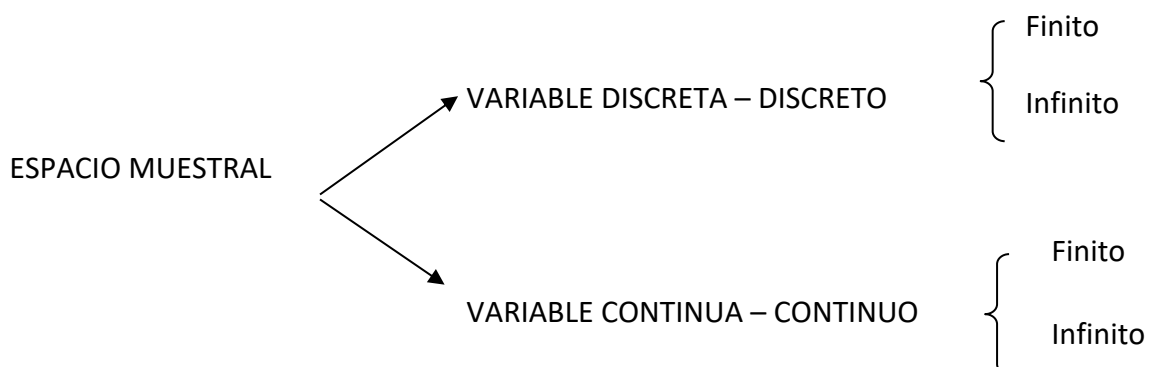
De los ejemplos anteriores podemos inferir que existen espacios muestrales cuyas variables aleatorias tienen un conjunto de posibles valores discreto, y se las llama **variables discretas**. Estas variables son el resultado de **contar**. ¿Cuáles de las variables aleatorias mencionadas arriba son discretas?

Por otra parte, a las variables aleatorias cuyos valores posibles se encuentran en cualquier parte de un intervalo, se las llama **variables continuas**. Estas variables son el resultado de **medir**.

El hecho de que una variable aleatoria *nos interesa cuando aún no tiene un valor específico*, nos obliga a utilizar una notación extraña al referirnos a ella. Denotamos con letras mayúsculas a las variables aleatorias y con minúsculas a los valores que contemplamos para ellas.

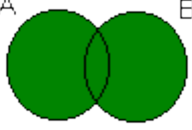
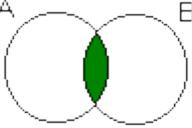
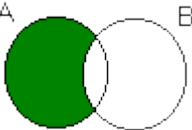
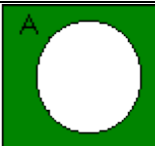
Además, los espacios muestrales pueden tener un número finito de elementos o un número infinito.

Por lo que decimos que:



Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos, A y B, se llaman:

Unión		$A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B.
Intersección		$A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.
Diferencia		$A - B$ es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.
Suceso complementario		El suceso $\bar{A} = E - A$ se llama suceso contrario de A.

Dos sucesos A y B, se llaman **excluyentes** cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$ (A y B son **disjuntos**)

Decimos que un suceso se ha verificado, si al realizar el experimento aleatorio correspondiente, el resultado es uno de los sucesos elementales de dicho suceso. Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 5, se ha verificado, entre otros, los sucesos {5}, {1,3,5} o E.

De manera análoga, decimos que:

- El suceso $A \cup B$ se verifica cuando se verifica uno de los dos o ambos – al menos uno.
- El suceso $A \cap B$ se verifica cuando se verifican simultáneamente A y B - ambos.
- El suceso $\bar{A}$, contrario de A, se verifica cuando no se verifica A – no ocurre A.
- Dos sucesos excluyentes no se verifican simultáneamente.
- El suceso $A \cap \bar{B}$ se verifica cuando sólo se verifica A – ocurre sólo A.
- El suceso $\bar{A} \cap B$ se verifica cuando sólo se verifica B – ocurre sólo B.

Las operaciones unión, intersección y complementación (contrario) verifican las propiedades:

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \phi = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \phi = \phi$

Ejemplo: En el experimento $E = \text{"lanzar un dado al aire"}$, consideramos los sucesos:

$A = \text{"sacar un número par"}$.

$B = \{1,2,3,5\} = \text{"obtener un 1, 2, 3 ó 5"}$.

$C = \{4,6\} = \text{"obtener un 4 ó un 6"}$.

$D = \{2,4,6\} = \text{"obtener un 2, 4 ó 6"}$.

$F = \{1,3\} = \text{"obtener un 1 ó un 3"}$.

$G = \text{"obtener un múltiplo de 3"}$.

- A y D son sucesos iguales al estar formados por los mismos sucesos elementales.
- C está contenido en A . Luego $C \cap A = C$, puesto que siempre que ocurre el suceso C (sacar 4 ó 6) ocurre el suceso A , puesto que se obtiene un número par.
- B y C son incompatibles, ya que $B \cap C = \emptyset$ y complementarios, al cumplirse $B \cup C = E$.
- $A \cup B = \text{"sacar un número par"} \cup \{1,2,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$.
- $A \cap G = \{2,4,6\} \cap \{3,6\} = \{6\}$, es decir, el suceso intersección de los sucesos "sacar un número par" y "obtener un múltiplo de tres" es "sacar un 6".
- $B - D = B \cap \overline{D} = \{1,2,3,5\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3,5\} = \text{"obtener un número impar"} = \overline{A}$.
- C y F son incompatibles puesto que $C \cap F = \emptyset$.

A las familias de conjuntos que verifican las propiedades anteriores se les denomina **álgebras de Boole**. Las propiedades que se verifican son conocidas como las **leyes de De Morgan**:

- El suceso contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de sus sucesos contrarios:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- El suceso contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus sucesos contrarios:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ejercicio: Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos $A = \text{"salir un número primo"}$ y $B = \text{"salir un número cuadrado"}$. Responde a las cuestiones siguientes:

- Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
- Los sucesos A y B , ¿son compatibles o incompatibles?
- Encuentra los sucesos contrarios de A y B .

Solución:

Los sucesos A y B están formados por los sucesos elementales que pueden verse a continuación:

$$A = \{2,3,5,7\}$$

$$B = \{1,4,9\}$$

A partir de estos conjuntos, tenemos:

- La unión e intersección de A y B son:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

- Al ser $A \cap B = \emptyset$, los sucesos A y B son incompatibles.

El suceso contrario de A es $\overline{A} = \{1,4,6,8,9\}$

El suceso contrario de B es $\overline{B} = \{2,3,5,6,7,8\}$