

TECNICAS DE CONTEO

Vimos en Estadística descriptiva que uno de los elementos más importantes era saber cuántas observaciones se han dado de cada valor de una variable, o sea conocer la frecuencia de cada dato. Pero muchas veces tenemos que agrupar los elementos y puede resultar difícil contar cuántas veces aparece una forma de grupo determinada en el total de lo agrupado.

Por ejemplo, si se te pidiera que cuentes los productos que han llegado en la última hora, bastaría con que contaras uno a uno todos esos productos. Sin embargo, si se te pidiera que cuentes cuántos grupos de 5 productos del mismo tipo pueden formarse con los que han llegado en la última hora, el problema sería bastante más complejo. Para este tipo de situaciones se utilizan las llamadas **“técnicas de conteo”**.

Veamos otro ejemplo en donde podríamos utilizar las técnicas de conteo: supongamos que tuviéramos que determinar el número de casos posibles de cantidades de niños y niñas en familias con 10 hijos, sin tener que listar detalladamente todas las posibilidades, para después contarlas. Fíjense que podríamos tener sólo niños, solo niñas, un niño y nueve niñas, dos niños y ocho niñas, y así sucesivamente todas las variaciones posibles.

Las **técnicas de conteo** son una serie de métodos matemáticos para calcular cuál es el número posible de elementos dentro de un conjunto (o varios conjuntos) de objetos, sin contar los elementos individualmente. Estas técnicas se usan cuando contar en forma manual se convierte en algo complicado debido a la gran cantidad de objetos y/o de combinaciones de objetos.

A estas técnicas las podemos dividir en tres grupos: la Regla Aditiva, la Regla Multiplicativa y las Agrupaciones.

Principio Aditivo o Regla Aditiva

Si se desea llevar a cabo una actividad, la cuál tiene varias formas alternativas para realizarse, y a su vez, cada una de esas alternativas tiene varias maneras distintas de presentarse (por ejemplo, las maneras W, E, ..., GE), entonces la cantidad total (N) de formas distintas en que esa actividad puede ser llevada a cabo, estará dada por la suma de las cantidades de cada alternativa (o sea, $N = W + E + \dots + GE$)

Por ejemplo, si una persona desea comprar un lavarropas, para lo cuál ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirlpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que el lavarropas de la marca Whirlpool se presenta en dos modelos, según la capacidad de carga (8 u 11 kilogramos), mientras que el lavarropas de la marca Easy, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos) y el lavarropas de la marca General Electric, se presenta en solo un tipo de carga, que es de 11 kilogramos. ¿Cuántas maneras diferentes tiene esta persona de comprar un lavarropas?

W = cantidad de tipos distintos de lavarropas Whirlpool

E = cantidad de tipos distintos de lavarropas Easy

GE= cantidad de tipos distintos de lavarropas General Electric

$$N = W + E + GE = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ maneras de seleccionar un lavarropas}$$

Nota: tengamos en cuenta que las alternativas son excluyentes. Si compro un lavarropas no voy a comprar el otro, es una marca u otra, lo que nos lleva a la conclusión que cuando debo seleccionar entre una u otra alternativa la cantidad de alternativas posibles se obtiene sumando las cantidades parciales de cada una de ellas.

El “o” implica + (suma), o sea aplicar la regla aditiva

Principio Multiplicativo o Regla Multiplicativa

Si se desea realizar una actividad que consta de “r” pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r-ésimo paso de N_r maneras o formas, entonces la actividad analizada puede ser llevada a efecto de:

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r \text{ maneras o formas distintas de realización}$$

El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad debe ser llevado a efecto, uno tras otro, hasta completar todos los pasos. No puede quedar ningún paso por cumplir.

Ejemplo 1. Una persona desea comprar un lavarropas de marca Whirlpool. Cuando acude a hacer la compra, se encuentra que dicho lavarropas se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), y en cuatro colores diferentes y puede ser automático o semi-automático. ¿Cuántos tipos de lavarropas Whirlpool tiene esta persona a su disposición para comprar?

Solución

Siendo, TC = Número de tipos de carga del lavarropas Whirlpool
CO = Número de colores de del lavarropas Whirlpool
TO = Número de forma de operar el lavarropas Whirlpool

Entonces, TC = 2 maneras
CO = 4 maneras
TO = 2 maneras

Recordemos que el lavarropas debe ser de un tipo de carga definido, de un color determinado y de una forma de operación específica. Las características no son alternativas, surgen de decisiones consecutivas, que deben darse a la vez. Por lo tanto, existen:

$TC \times CO \times TO = 2 \times 4 \times 2 = 16$ posibles maneras para el comprador de seleccionar un lavarropas Whirlpool en esa tienda.

Nota: tengamos en cuenta que estas características van juntas: Si compro un lavarropas, tengo que elegir su capacidad de carga, su color y la forma de operarlo, lo que nos lleva a la conclusión que cuando debo seleccionar entre los colores posibles, también debo seleccionar un tipo de carga y un tipo de forma de operación. La cantidad total de formas distintas se obtiene multiplicando las cantidades parciales de cada una de las características.

El “y” implica x (producto), o sea aplicar la regla multiplicativa

Ejemplo 2. ¿De cuántas maneras diferentes podrá vestirse un joven que tiene 3 camisas diferentes, 4 pantalones y 2 pares de calzado?

Solución

Para vestirse tiene que escoger un pantalón y una camisa y un calzado: Son entonces,
 $3 \times 4 \times 2 = 24$ maneras diferentes de vestirse

Ejemplo 3. Una persona desea construir su casa, para lo cuál considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o bloques de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o una plancha metálica galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

Solución

Considerando que son $r = 4$ pasos, y la casa debe tener: cimiento (piso), paredes, techo y acabado. Entonces hay

N_1 = maneras de hacer cimientos = 2

N_3 = maneras de hacer techos = 2

N_2 = maneras de construir paredes = 3

N_4 = maneras de hacer acabados = 1

O sea $N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ maneras de construir la casa

Situaciones Mixtas - Uso de ambas Reglas

En la vida real, las cosas se dan en forma más compleja que en la teoría. Es poco frecuente que tenga que aplicar sólo la regla aditiva o sólo la regla multiplicativa para resolver un problema. Es más probable que tenga que usar las dos al mismo tiempo. Veamos esto con el ejemplo de los lavarropas.

La persona que desea comprar un lavarropas, para lo cuál ha pensado que puede elegir entre las marcas Whirlpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra, se encuentra que el lavarropas de la marca Whirlpool se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), en cuatro colores diferentes y puede ser automático o semi-automático, mientras que el lavarropas de la marca Easy, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos), en dos colores diferentes y puede también ser automático o semiautomático, y por último la lavadora de la marca General Electric, se presenta en solo un tipo de carga, de 11 kilogramos, dos colores diferentes y solo hay un modelo, semiautomático. ¿Cuántos tipos de lavarropas tiene esta persona a disposición para comprar?

Siendo, W = Número de maneras de seleccionar una lavadora Whirlpool
 E = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca Easy
 GE = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca General Electric

Entonces, $W = 2$ tipos de cargas $\times$ 4 colores $\times$ 2 formas $= 2 \times 4 \times 2 = 16$ maneras
 $E = 3$ tipos de cargas $\times$ 2 colores $\times$ 2 formas $= 3 \times 2 \times 2 = 12$ maneras
 $GE = 1$ tipos de cargas $\times$ 2 colores $\times$ 1 forma $= 1 \times 2 \times 1 = 2$ maneras

Hemos aplicado la regla multiplicativa porque debemos elegir un tipo de carga **y** un color **y** una forma (el y implicaba “producto”)

Por lo tanto, existen: $M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30$ maneras de seleccionar una lavadora

Hemos aplicado la regla aditiva porque debemos elegir Whirlpool **o** Easy **o** General Electric, un lavarropas de las tres alternativas posibles (el o implicaba “suma”)

Resumen

¿Cómo podemos distinguir cuándo hacer uso del principio multiplicativo y cuándo del aditivo?

Es muy simple, cuando se trata de una actividad, la cual requiere para llevarse a cabo de un conjunto de pasos, entonces haremos uso del principio multiplicativo y si la actividad a desarrollar tiene un número discreto de alternativas para un único paso, haremos uso del principio aditivo.

Entonces hablamos de que una actividad responde al principio multiplicativo cuando implica que todos y cada uno de los pasos que se necesitan para llevar a cabo la actividad deben realizarse secuencialmente, uno tras otro.

El “y” implica $\times$ (producto)

Y hablamos de que una actividad responde al principio aditivo cuando implica que existen pasos alternativos para llevar a cabo la actividad.

El “o” implica $+$ (suma)

Factorial

Antes de pasar a ver las Técnicas de Conteo de Agrupaciones, es necesario que quede en claro el concepto de Factorial.

El Factorial de un número es una función que se aplica a números Naturales, y devuelve como resultado también un número Natural, que es igual al producto del número dado por cada uno de los Naturales anteriores a ese número. Al ser una función significa que todos los números Naturales tienen su factorial y el factorial de un número es único.

El factorial es una función recursiva, lo que significa que puede ser expresada invocándose a sí misma, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ N! &= N \times (N-1)! \end{aligned}$$

O sea,

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$$

Nota: 3! Se lee “tres factorial”. N! Se lee “ene factorial”.

En algunos problemas de matemáticas se nos presentan multiplicaciones de números Naturales sucesivos, tales como: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; $3 \times 2 \times 1 = 6$; $2 \times 1 = 2$.

Para abreviar estas expresiones, se usa una notación especial, llamada notación factorial, que nos denota las multiplicaciones sucesivas de n hasta 1 y se define como:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \text{ (se lee “cuatro factorial”) } 3 \times 2 \times 1 = 3! \text{ (se lee “tres factorial”)}$$

$$\text{En términos generales: } n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n! \text{ (se lee “n factorial”)}$$

Ejemplos:

1. $7! = 7 \times 6! = 7 \times 6 \times 5 \times 4!$
2. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
3. $4! \times 3! = (24) \times (6) = 144$
4. $\frac{3!}{5!} = \frac{3!}{5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20}$

Las Agrupaciones

Estas técnicas de conteo son las que utilizamos cuando vamos a hacer grupos de igual cantidad de elementos. Poseemos un conjunto de objetos y deseamos conocer cuántos grupos diferentes podríamos formar con ellos si todos los grupos fueran de igual cantidad de elementos. Acá debemos aclarar que se pueden dar diferentes situaciones:

- a) Los elementos no pueden aparecer más de una vez en cada grupo. O sea, no podemos repetirlos.
- b) Los elementos pueden aparecer más de una vez en cada grupo. O sea, podemos repetirlos o reponerlos.

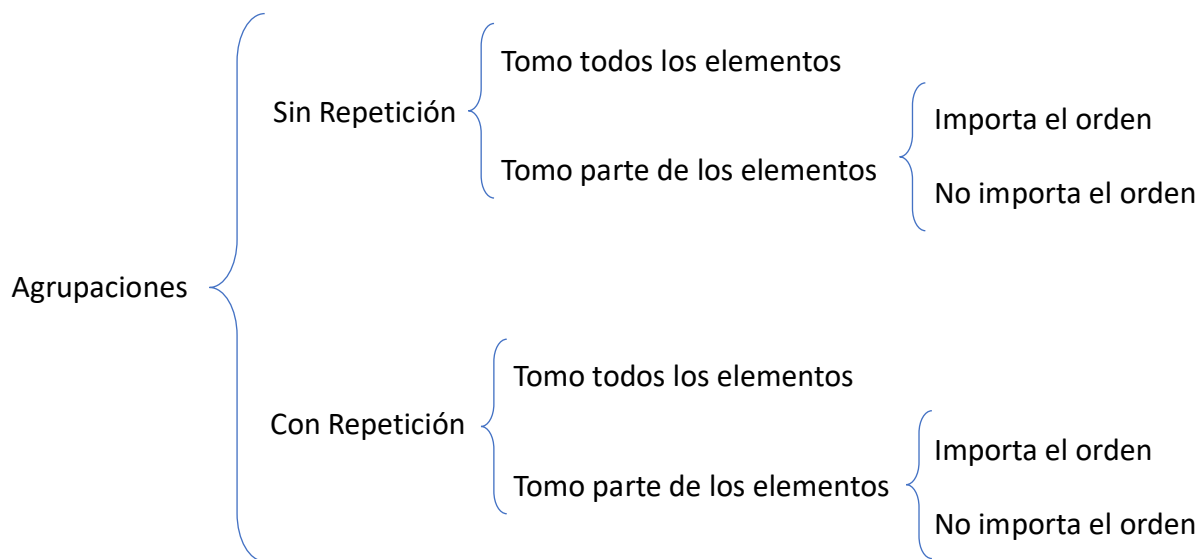
Además de esta división, podríamos, a su vez, tener dos alternativas:

- a) El orden importa. O sea, si dos elementos cambian de posición, u orden, se formará un grupo diferente. Dos grupos pueden ser distintos aún cuando todos sus elementos sean iguales con tan solo si dos de sus integrantes cambian de lugar. En los conjuntos de dígitos que forman un número, el orden importa: no es lo mismo el número 123 que el 312, ni el 213. Por lo tanto, al cambiarlos de lugar obtenemos números distintos.
- b) El orden no importa. O sea, si dos elementos cambian de posición, u orden, no se formará un grupo diferente, tendremos el mismo grupo. Dos grupos serán distintos cuando alguno de sus elementos sea distinto, no importando qué ubicación tienen los elementos en cada grupo. En los conjuntos de personas, en general no importa el orden: Juan y José forman el mismo equipo que José y Juan.

Otra consideración a analizar en los grupos es que puede darse que:

- Los grupos están formados por el total de los elementos a agrupar, por lo que cada grupo los elementos tendrán un orden distinto. Todos los grupos tienen a todos los elementos, pero en distinto orden y los grupos se distinguen entre sí por el orden de los elementos en cada uno.
- Los grupos son subconjuntos del conjunto original, no tienen a todos los elementos, sino una parte de ellos.

Con todas estas características combinadas se dan los diferentes tipos de agrupaciones. Veamos en un cuadro cuáles son estos tipos de agrupaciones existentes:

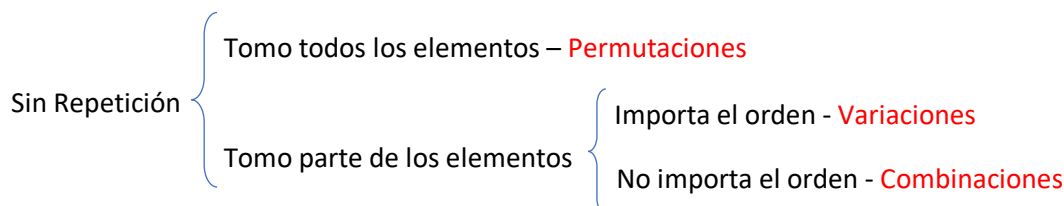


Las Agrupaciones sin Repetición

Cada una de las agrupaciones tiene un nombre diferente en función de la cantidad de elementos con los que armó el grupo y si el orden importa o no en la formación de los grupos.

Tengamos en cuenta que cuando formamos grupos con todos los elementos, sólo se puede cambiar el orden de los elementos. A estas agrupaciones se las denomina **Permutaciones** (P_N)

En cambio, cuando tomo parte de los elementos totales puedo cambiar el orden, en este caso puede generar un grupo nuevo o no. A las agrupaciones donde tomamos parte de los elementos y el orden nos importa las llamamos **Variaciones** (**V**). En el caso de que no nos importe el orden, las llamamos **Combinaciones** (**C**).



Si tenemos un conjunto con N elementos la cantidad de diferentes **Permutaciones** será: $P_N = N!$ (n factorial)

Ejemplo de Permutaciones. ¿De cuantas formas diferentes 6 personas se pueden sentar en el cine si han adquirido 6 entradas consecutivas?

Solución:

Como a los 6 se van a sentar, o sea los grupos (las formas diferentes de sentar a las 6 personas) contienen el total de los elementos, y para calcular la cantidad de grupos usaremos permutaciones.

$$P_N = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Si de esos N elementos tomáramos un subgrupo de M elementos (M es menor que N) podremos tener **Variaciones**, si el orden nos importa o **Combinaciones**, si el orden no nos importa.

La cantidad diferentes de **Variaciones** de N elementos tomados de a M será: $V_N^M = \frac{N!}{(N-M)!}$

Ejemplo de Variaciones. a) ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, siendo que todos deben constar de seis dígitos consecutivos, que pueden tomar cualquier valor desde 0 a 9 y no es posible repetir el mismo valor en los distintos dígitos del número? b) Si se define que el cero no puede ser el dígito inicial (primera posición) y no es posible repetir el mismo valor en los distintos dígitos del número, ¿cuántos son los números distintos posibles? c) ¿Cuántos de los números telefónicos calculados en el punto anterior (b) empiezan por el número siete? d) ¿Cuántos de los números telefónicos calculados en (b) dan lugar a un número que termina con dígito impar?

Solución

- a) A los diez dígitos los voy a agrupar de a 6 dígitos para formar los distintos números telefónicos posibles, por lo que el orden importa. Veamos si tomamos seis de los diez dígitos, pero éstos no pueden repetirse. O sea, usaremos Variaciones.

$$V_{10}^6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151.200 \text{ de alternativas}$$

- b) Para la primera posición del número telefónico tengo 9 dígitos posibles del 1 al 9, ya que cero no lo podemos utilizar, luego como podemos usar todos los dígitos, pero no los podemos repetir y ya usamos uno en la primera posición, tendremos una variación sin repetición de 10 elementos tomados de a cinco. Con lo cual tendremos:

$$9 \times V_9^5 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136.080 \text{ números telefónicos distintos}$$

- c) Para la primera posición del número telefónico tengo 1 dígito posible el número siete, luego como podemos usar todos los dígitos, pero no los podemos repetir y ya usamos uno en la primera posición, tendremos una variación sin repetición de 10 elementos tomados de a cinco. Con lo cual tendremos:

$$1 \times V_9^5 = 1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15.120 \text{ números telefónicos distintos}$$

- d) Para la última posición del número telefónico tengo 5 dígitos posibles (los 5 números impares), además en la primera posición no podemos usar el cero y ya tenemos un número impar utilizado como último dígito por lo que tenemos 8 dígitos para usar. Pero, como no podíamos repetir los dígitos y ya usamos uno en la primera posición y otro en la última, tendremos una variación sin repetición de 8 elementos tomados de a 4. Con lo cual tendremos:

$$5 \times 8 \times V_8^4 = 5 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 67.200 \text{ números telefónicos distintos}$$

Pasemos ahora a agrupaciones dónde **NO** importa el orden, o sea a las **Combinaciones**.

La cantidad de diferentes **Combinaciones** de N elementos tomados de a M será: $C_N^M = \frac{N!}{M! \times (N-M)!}$

Ejemplo de Combinaciones. ¿De cuántas formas diferentes se puede formar una delegación de estudiantes si el curso total es de 20 estudiantes y la delegación debe contar con sólo 4 de ellos?

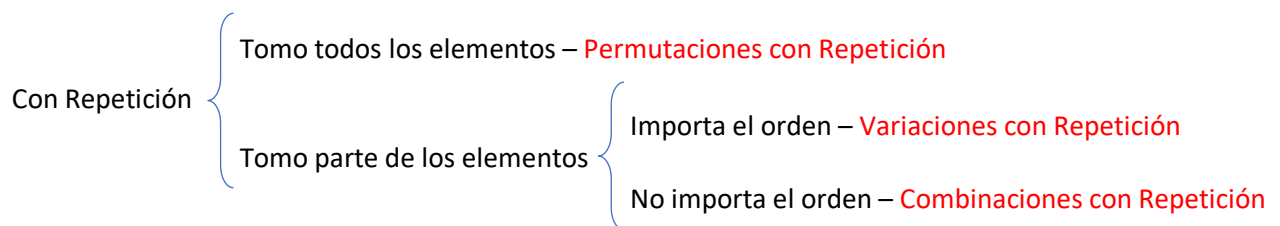
Solución

En este caso no importa el orden porque son personas (María, José, Luis, Ana sería la misma delegación que Luis, José, Ana, María). Tomamos pues para formar la delegación, de los 20 estudiantes, los distintos grupos posibles de 4 estudiantes sin que nos importe el orden, por lo que debemos usar para el cálculo la técnica de Combinaciones.

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{4! \cdot (20-4)!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{4! \cdot 16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.845 \text{ conjuntos de delegaciones}$$

Las Agrupaciones con Repetición

Cuando los elementos se pueden repetir (o reponer) para formar un grupo, obtendremos de manera similar a las agrupaciones sin repetición, las denominadas **Permutaciones con Repetición**, las **Variaciones con Repetición** y las **Combinaciones con Repetición**.



Si tenemos un conjunto con **N** elementos, la cantidad de diferentes **Permutaciones** si hay un elemento que se repite n_1 veces, otro que se repite n_2 veces, y otro que se repite n_3 veces, surgirá de quitar todas las agrupaciones que presenten los elementos repetidos más allá de esos casos permitidos. Así, las **Permutaciones con repetición** serán:

$$PR_N^{n_1, n_2, n_3} = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3!}$$

Ejemplo de Permutaciones con Repetición. ¿Cuántas siglas de cuatro letras diferentes puedo formar con las letras de la palabra CASA?

Solución

Tengamos en cuenta que tenemos usar las cuatro letras, pero hay dos que son iguales al utilizar todos los elementos. Lo único que podemos hacer es cambiarles el orden, pero al tener dos letras repetidas cada vez que permutemos tendremos:

$$PR_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Si tenemos un conjunto con **N** elementos que se repiten, nos importa el orden y tomamos algunos de los elementos del total, por ejemplo **M**, deberemos usar las **Variaciones con repetición**, que se calculan como:

$$VR_N^M = N^M$$

Ejemplo de Variaciones con Repetición. a) ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, siendo que todos deben constar de seis dígitos consecutivos, que pueden tomar cualquier valor desde 0 a 9? b) Si se define que el cero no puede ser el dígito inicial de los números a diseñar y que es posible repetir el mismo valor en distintos dígitos de esos números, ¿cuántos son los números distintos posibles?

Solución

- a) Dado que un número telefónico debe constar con los 6 dígitos, debo usar Variaciones con Repetición, o sea:

$$VR_{10}^6 = 10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000 \text{ de alternativas}$$

- b) Para la primera posición del número telefónico tengo 9 dígitos posibles del 1 al 9, ya que cero no lo podemos utilizar, luego como podemos usar todos los dígitos, los podemos repetir, tendremos una variación con repetición de 10 elementos tomados de a cinco. Con lo cual tendremos:

$$9 \times VR_{10}^5 = 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900.000 \text{ números telefónicos distintos}$$

Si tenemos un conjunto con **N** elementos que se repiten, no nos importa el orden y tomo algunos de los elementos del total, **M**, deberemos usar las **Combinaciones con repetición**:

$$CR_N^M = \frac{(N+M-1)!}{M! \cdot (N-1)!}$$

Esta técnica no es muy utilizada.

Ejemplo de Combinaciones con Repetición. Tienes que ir a la panadería a comprar una docena de facturas. Si en la panadería tienen una bandeja de medias lunas, otra con cañoncitos y una tercera con sacramentos, ¿De cuántas formas distintas puedes armar la docena? Cada bandeja contiene 30 facturas.

Solución

En este ejemplo, se pueden repetir las facturas, hay cantidad suficiente para hacerlo, no importa el orden y no voy a llevar las tres bandejas, sino tan sólo una docena de facturas. Por lo que puedes usar Combinaciones con Repetición.

$$CR_{30}^{12} = \frac{(30 + 12 - 1)!}{12! \cdot (30 - 1)!} = \frac{41!}{21! \cdot 29!} = 7.898.654.920$$