

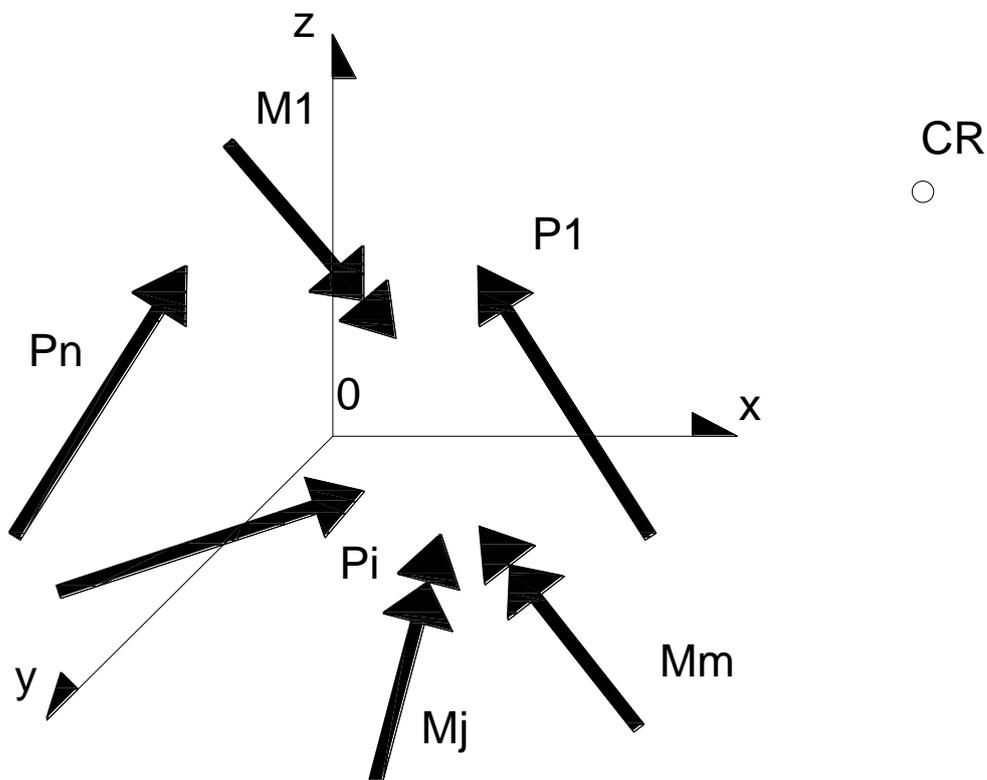
## REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN PUNTO

Previo a tratar el tema de la reducción de un sistema de fuerzas, vamos a definir un sistema de fuerzas como un conjunto de vectores fuerzas, y vectores momento, si los hubiere, con una orientación característica en el espacio que limitamos para el estudio de un determinado fenómeno físico.

Reducir un sistema de fuerzas a un punto **CR** denominado centro de reducción, significa encontrar la mínima expresión mecánica equivalente en dicho punto.

Sea, por ejemplo el sistema de fuerzas de la figura n<sup>o</sup> 1, que buscamos reducirlo al centro de reducción CR.

figura n<sup>o</sup> 1



En el sistema de la figura n<sup>o</sup> 1, constituido por las fuerzas,  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$ , y los pares,  $\vec{M}_1; \dots; \vec{M}_j; \dots; \vec{M}_m$ , que queremos reducir a  $C_r$ , de la siguiente forma:

\* a) trasladamos paralelamente los pares  $\vec{M}_1; \dots; \vec{M}_j; \dots; \vec{M}_m$  así mismos, de forma tal que sus rectas de acción pasen por CR;

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN**  
**PÉRGOLA**

\* b) colocar en **CR**, bifuerzas de  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$ , de forma tal que, cada componente de sentido opuesto a las fuerzas mencionadas, formen un par de magnitud

$\vec{P}_1^x(\vec{C}_R - \vec{A}_1); \dots; \vec{P}_i^x(\vec{C}_R - \vec{A}_i); \dots; \vec{P}_n^x(\vec{C}_R - \vec{A}_n)$  con las correspondientes fuerzas del sistema, siendo  $\vec{A}_1; \dots; \vec{A}_i; \dots; \vec{A}_n$ , puntos arbitrarios de  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$  respectivamente;

\* c) Quedando el sistema de fuerzas Actuando en el punto CR;

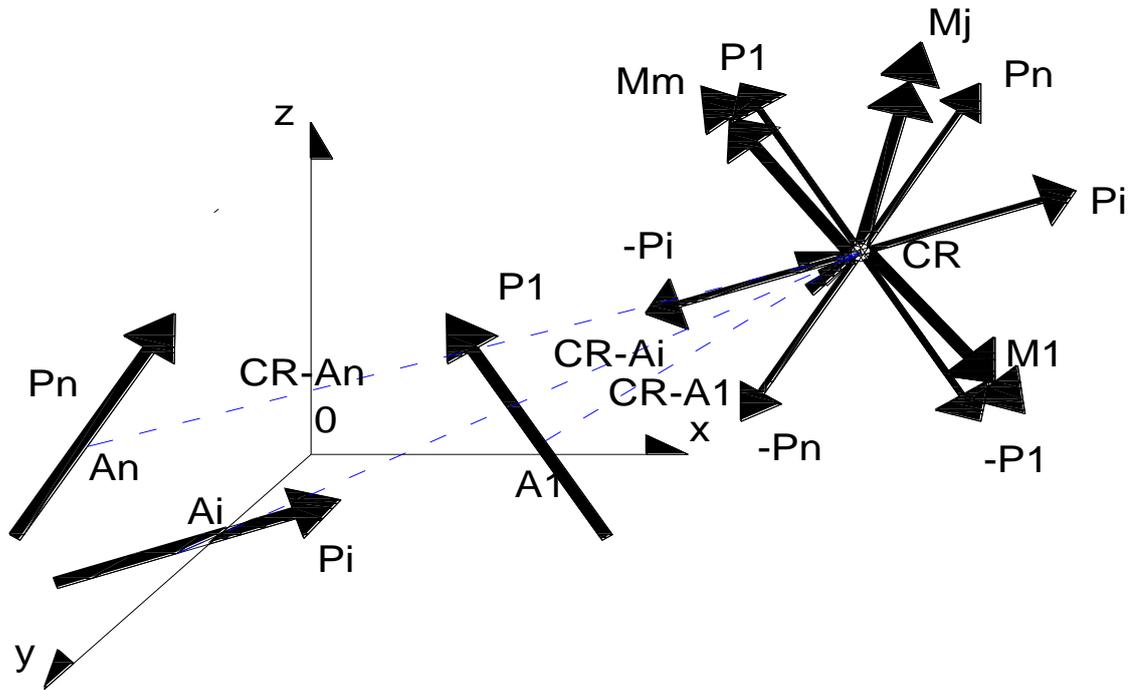
\* d) De esta forma, aplicando el primer principio de la estática podemos componer las fuerzas  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$  en una sola fuerza, reemplazando estas por una sola fuerza equivalente a las mismas denominada resultante de reducción  $\vec{R}_R$ ;

\* e) Componiendo los pares correspondientes en el ítem a), y los pares correspondientes en el ítem b), se obtiene, el par de pares, resultante de la composición de los mismos, denominado Momento de reducción del sistema  $\vec{M}_R$ .

\* f) La resultante de reducción  $\vec{R}_R$ , y el momento de reducción  $\vec{M}_R$ , es la mínima expresión equivalente de nuestro sistema de fuerzas.

Las figuras n ° 2, y n ° 3, muestran esta situación

figura n ° 2



Como podemos observar de la figura n ° 2, trasladamos los momentos  $\vec{M}_1; \dots; \vec{M}_j; \dots; \vec{M}_m$  paralelamente a sí mismos al centro de reducción **CR**, considerando la propiedad de los pares que se pueden desplazar en planos paralelos, mientras que, con respecto a las fuerzas  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$ , por el segundo principio de la estática, colocamos en **CR**, bifuerzas o sistemas en equilibrio de cada una de las fuerzas del sistema, en consecuencia, las fuerzas  $-\vec{P}_1; \dots; -\vec{P}_i; \dots; -\vec{P}_n$  en el centro de reducción, forman con sus homólogas  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$  del sistema, pares cuyas distancias son  $\vec{C}_R - \vec{A}_1; \dots; \vec{C}_R - \vec{A}_i; \dots; \vec{C}_R - \vec{A}_n$  respectivamente. Luego, estos pares  $\vec{P}_1^x(\vec{C}_R - \vec{A}_1); \dots; \vec{P}_i^x(\vec{C}_R - \vec{A}_i); \dots; \vec{P}_n^x(\vec{C}_R - \vec{A}_n)$  se trasladan a **CR** por la misma propiedad que mencionamos para los momentos.

En consecuencia, el sistema queda concentrado en **CR** y formado por las fuerzas  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$ , los momentos  $\vec{M}_1; \dots; \vec{M}_j; \dots; \vec{M}_m$ , y los momentos resultantes de los pares  $\vec{P}_1^x(\vec{C}_R - \vec{A}_1); \dots; \vec{P}_i^x(\vec{C}_R - \vec{A}_i); \dots; \vec{P}_n^x(\vec{C}_R - \vec{A}_n)$ . De aquí, se componen las fuerzas  $\vec{P}_1; \dots; \vec{P}_i; \dots; \vec{P}_n$ , reemplazándose por una fuerza  $\vec{R}_R^{CR}$  denominada

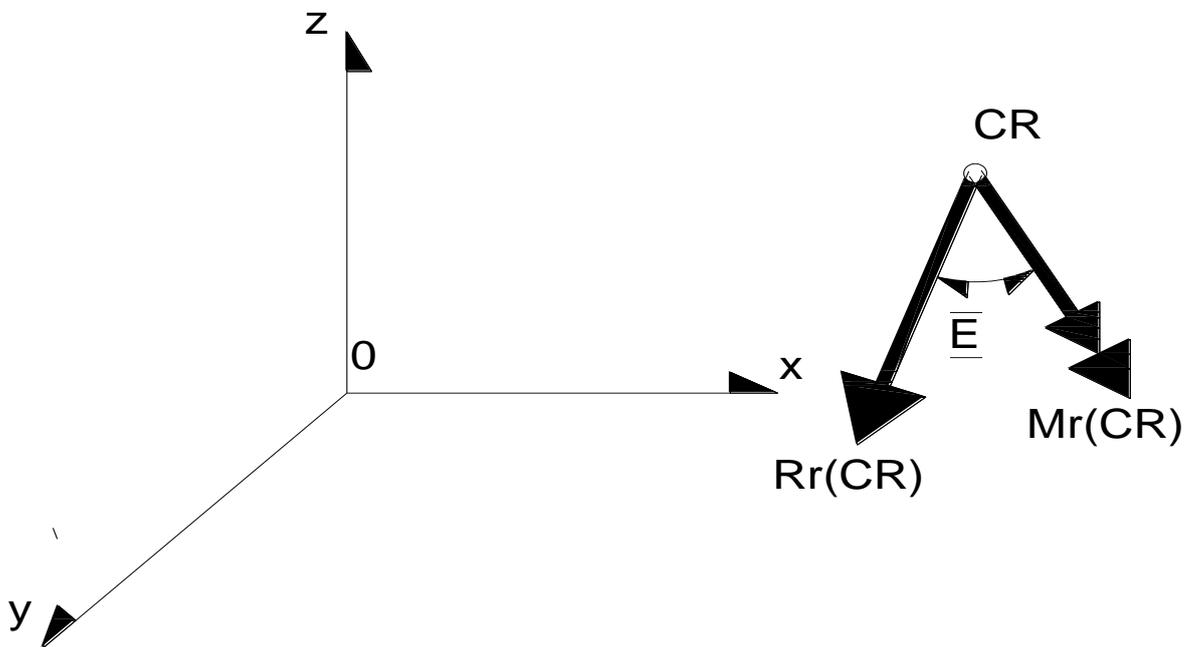
**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

resultante de reducción en **CR**, produciendo el mismo efecto que las fuerzas del sistema, debido al primer principio de la estática, mientras que los momentos y pares constitutivos anteriormente descriptos se componen entre sí y son reemplazados por un solo par que es el par de pares del sistema en **CR**, y se denomina momento de reducción de sistema en el centro de reducción CR  $\left(\overrightarrow{M}_R^{CR}\right)$ . Esta situación se muestra en la figura n ° 3. De esta forma se efectúa la reducción de un sistema de fuerzas a un punto denominado centro de reducción.

**Conclusión:** "Reducir un sistema de fuerzas a un punto denominado centro de reducción, significa hallar la mínima expresión mecánica equivalente al sistema en dicho punto".

En el caso general de un sistema espacial, la reducción de un sistema de fuerzas a un punto resulta una resultante de reducción  $\overrightarrow{R}_R^{CR}$ , y un momento de reducción  $\left(\overrightarrow{M}_R^{CR}\right)$ .

figura n ° 3

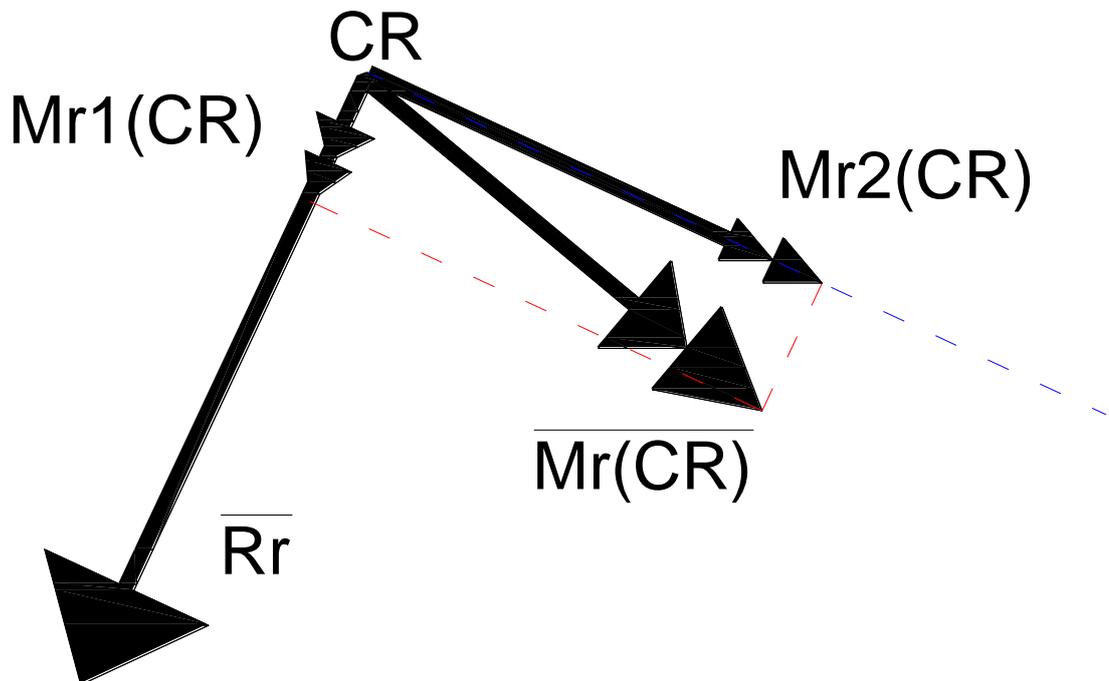


De aquí, deducimos que la resultante de reducción  $\overrightarrow{R}_R^{CR}$  del sistema es un invariante, pues no depende del centro de reducción elegido, por lo que podemos escribirlo  $\overrightarrow{R}_R$  directamente. Al ser un vector el mismo, lo denominaremos **Invariante vectorial**  $I_V$ .

**INVARIANTE ESCALAR**

De la figura n<sup>o</sup> 3, observamos que los vectores  $\vec{R}_R$  y  $(\vec{M}_R^{CR})$  forman un ángulo  $\xi$ , de forma tal que si en el plano que definen estos vectores, descomponemos el momento de reducción en una componente normal a  $\vec{R}_R$ , y otra en la dirección de esta última, como lo indica la figura n<sup>o</sup> 4, y llamando a la componente en la dirección de  $\vec{R}_R$  como  $\vec{M}_{R1}$ , y la componente normal a esta como  $\vec{M}_{R2}$ , entonces, el producto escalar entre  $(\vec{M}_R^{CR})$  y  $\vec{R}_R$  permanece constante, siendo el mismo independiente del centro de reducción elegido.

figura n<sup>o</sup> 4



Demostración del invariante escalar

Siendo

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN**  
**PÉRGOLA**

$$(1) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR} = \sum_{i=1}^n p_i x (\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i)$$

Multiplicando (1) escalarmente por  $\overrightarrow{R}_R$  nos queda,

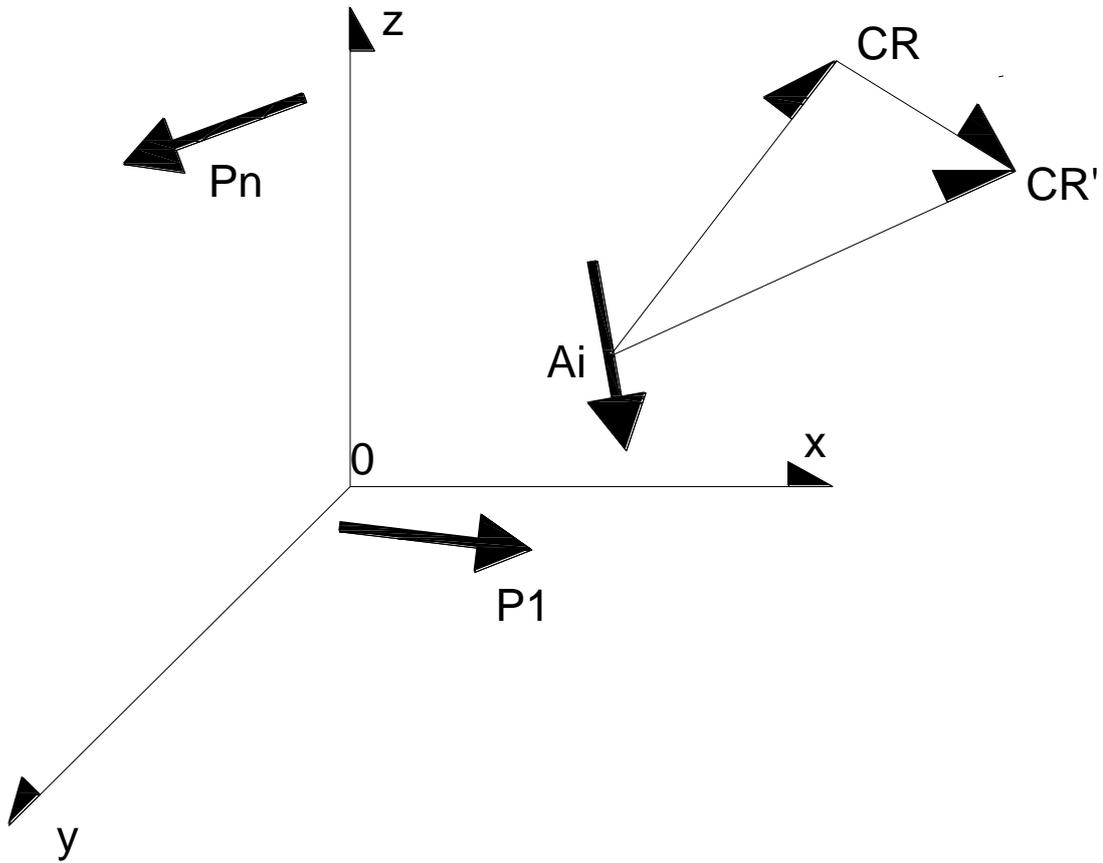
$$(2) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR} \cdot \overrightarrow{R}_R = \left[ \sum_{i=1}^n p_i x (\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i) \right] \cdot \overrightarrow{R}_R$$

Cambiando el centro de reducción a  $CR'$ , el producto escalar (2) queda,

$$(3) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR'} \cdot \overrightarrow{R}_R = \left[ \sum_{i=1}^n p_i x (\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{A}_i) \right] \cdot \overrightarrow{R}_R$$

Luego, podemos considerar los vectores  $(\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{A}_i)$  como la suma vectorial de  $(\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i)$ , y  $(\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{C}_R)$ , como lo mostramos en la figura n º 5.

figura n ° 5



Entonces,  $\left(\overrightarrow{M}_R^{CR'}\right)$  se puede expresar,

$$(4) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR'} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x (\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{A}_i) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x \left[ (\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i) + (\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{C}_R) \right]$$

También se expresa (4) de la siguiente forma,

$$(5) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR'} = \left[ \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x (\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i) + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x (\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{C}_R) \right]$$

Multiplicando ambos miembros de (5) por  $\overrightarrow{R}_R$ , llegamos a,

$$(6) \quad \overrightarrow{M}_R^{CR'} \cdot \overrightarrow{R}_R = \left[ \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x (\overrightarrow{C}_R - \overrightarrow{A}_i) + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_i^x (\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{C}_R) \right] \cdot \overrightarrow{R}_R$$

Luego, el segundo término del corchete en el segundo miembro, el vector  $(\overrightarrow{C}_R' - \overrightarrow{C}_R)$  es constante para todos los productos vectoriales, por lo que se puede extraer de esta sumatoria,

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

quedando el producto vectorial de  $\left(\overrightarrow{C_R'} - \overrightarrow{C_R}\right) \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p_i} x_i = \overrightarrow{R_R} \times \left(\overrightarrow{C_R'} - \overrightarrow{C_R}\right)$ . Reemplazando ésta última en (6) y desarrollando el producto escalar, resulta,

$$(7) \overrightarrow{M_R}^{CR} \cdot \overrightarrow{R_R} = \overrightarrow{M_R}^{CR} \cdot \overrightarrow{R_R} + \overrightarrow{R_R} \times \left(\overrightarrow{C_R'} - \overrightarrow{C_R}\right) \cdot \overrightarrow{R_R}$$

El segundo término del segundo miembro de (7) es cero, debido a que el producto vectorial de la resultante de reducción por el vector  $\left(\overrightarrow{C_R'} - \overrightarrow{C_R}\right)$  es un vector normal al plano de estos, y, en consecuencia, el producto escalar por  $\overrightarrow{R_R}$  es nulo, concluyendo,

$$(8) \overrightarrow{M_R}^{CR} \cdot \overrightarrow{R_R} = \overrightarrow{M_R}^{CR} \cdot \overrightarrow{R_R}$$

Lo que demuestra que el producto escalar del momento de reducción por la resultante de reducción es independiente de  $\mathbf{CR}$ , y es constante, que se denomina **Invariante escalar I**.

Geoméricamente, podemos decir que el producto escalar representa la proyección del vector momento de reducción en la dirección de  $\overrightarrow{R_R}$ .

De acuerdo al valor del invariante escalar, podemos resumir la siguiente tabla:

$\overrightarrow{R_R}$	$\overrightarrow{M_R}^{CR}$	$I = \overrightarrow{R_R} \cdot \overrightarrow{M_R}^{CR}$	Efecto
0	0	0	<b>Equilibrio</b>
$\neq 0$	0	0	<b>Resultante</b>
0	$\neq 0$	0	<b>Par resultante</b>
$\neq 0$	$\neq 0$	0	<b>Resultante</b>
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	<b>Irreductible</b>

A continuación, explicaremos en detalle el caso  $\overrightarrow{R_R} \neq 0; \overrightarrow{M_R}^{CR} \neq 0; I = 0$ . La conclusión es que los vectores  $\overrightarrow{R_R}$  y  $\overrightarrow{M_R}^{CR}$  son normales entre sí (figura n° 6-a), en consecuencia, podemos reemplazar por un par  $\overrightarrow{M_R}^{CR} = \overrightarrow{R_R} \cdot d$  en un plano normal al mismo (figura n° 6-b), siendo la distancia entre  $\overrightarrow{R_R}$  y  $-\overrightarrow{R_R}$ . Ubicando la componente  $-\overrightarrow{R_R}$  de este par coincidente con la recta de acción de  $\overrightarrow{R_R}$ , formando un sistema en equilibrio con esta última, y, por el segundo principio de la estática, el sistema reducido con la restante componente del par, es decir,  $\overrightarrow{R_R}$ .

figura n<sup>o</sup> 6-a

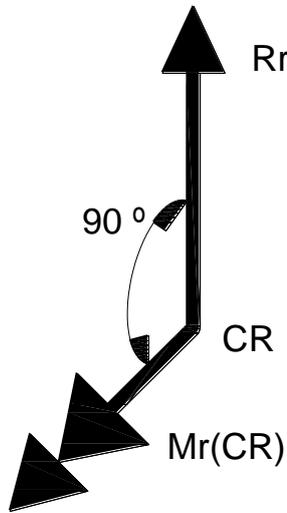
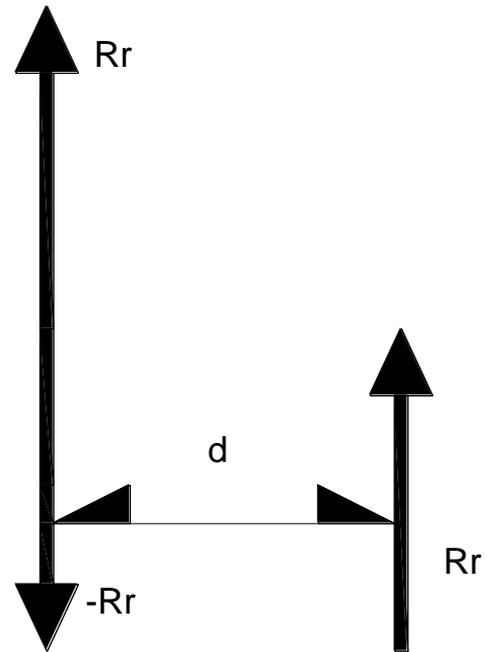


figura n<sup>o</sup> 6-b



COMPONENTES DE  $\vec{R}_R$  Y  $\vec{M}_R^{CR}$

Comenzando con las componentes de  $\vec{R}_R$

$$(9) \vec{R}_R = R_{Rx} \vec{i} + R_{Ry} \vec{j} + R_{Rz} \vec{k}$$

Siendo,

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{xx} \rightarrow R_{Rx} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{yy} \rightarrow R_{Ry} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \beta_i \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_{zz} \rightarrow R_{Rz} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \gamma_i \end{array} \right.$$

El módulo de la resultante de reducción es,

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN PÉRGOLA**

$$(11) \left| \overrightarrow{\mathbf{R}}_R \right| = \sqrt{R_{Rx}^2 + R_{Ry}^2 + R_{Rz}^2}$$

Mientras que los cosenos directores de los ángulos  $(\alpha_R; \beta_R; \gamma_R)$  de la resultante respecto de los ejes coordenados son,

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_R = \frac{R_{Rx}}{\left| \overrightarrow{\mathbf{R}}_R \right|} \\ \cos \beta_R = \frac{R_{Ry}}{\left| \overrightarrow{\mathbf{R}}_R \right|} \\ \cos \gamma_R = \frac{R_{Rz}}{\left| \overrightarrow{\mathbf{R}}_R \right|} \end{array} \right.$$

En cuanto a las componentes del momento  $\overrightarrow{\mathbf{M}}_R^{CR}$ ,

$$(13) \overrightarrow{\mathbf{M}}_R^{CR} = M_{Rx}^{CR} \tilde{i} + M_{Ry}^{CR} \tilde{j} + M_{Rz}^{CR} \tilde{k}$$

Obteniéndose las componentes de efectuar el producto vectorial siguiente:

$$(14) \overrightarrow{\mathbf{M}}_R^{CR} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_i \cdot \cos \alpha_i & P_i \cdot \cos \beta_i & P_i \cdot \cos \gamma_i \\ (x_{CR} - x_{Ai}) & (y_{CR} - y_{Ai}) & (z_{CR} - z_{Ai}) \end{vmatrix}$$

Las componentes de (13), deducidas de (14),

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \sum Mom_{xx} \rightarrow M_{Rx}^{CR} = \sum_{i=1}^n [P_i \cos \beta_i (z_{CR} - z_{Ai}) - P_i \cos \gamma_i (y_{CR} - y_{Ai})] \\ \sum Mom_{yy} \rightarrow M_{Ry}^{CR} = \sum_{i=1}^n [P_i \cos \gamma_i (x_{CR} - x_{Ai}) - P_i \cos \alpha_i (z_{CR} - z_{Ai})] \\ \sum Mom_{zz} \rightarrow M_{Rz}^{CR} = \sum_{i=1}^n [P_i \cos \alpha_i (y_{CR} - y_{Ai}) - P_i \cos \beta_i (x_{CR} - x_{Ai})] \end{array} \right.$$

En cuanto al módulo de  $\overrightarrow{\mathbf{M}}_R^{CR}$ ,

$$(16) \left| \overrightarrow{\mathbf{M}}_R^{CR} \right| = \sqrt{(M_{Rx}^{CR})^2 + (M_{Ry}^{CR})^2 + (M_{Rz}^{CR})^2}$$

Mientras que los cosenos directores de los ángulos  $(\alpha_{MR}; \beta_{MR}; \gamma_{MR})$  que forma el momento de reducción respecto los ejes coordenados, resultan,

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_{MR} = \frac{M_{R_x}^{CR}}{|M_R^{CR}|} \\ \cos \beta_{MR} = \frac{M_{R_y}^{CR}}{|M_R^{CR}|} \\ \cos \gamma_{MR} = \frac{M_{R_z}^{CR}}{|M_R^{CR}|} \end{array} \right.$$

Ángulo  $\xi$  entre  $\overrightarrow{R_R}$  y  $\overrightarrow{M_R^{CR}}$

Para determinar el ángulo  $\xi$ , partimos del producto escalar entre  $\overrightarrow{R_R}$  y  $\overrightarrow{M_R^{CR}}$ ,

$$(18) I = \overrightarrow{R_R} \cdot \overrightarrow{M_R^{CR}} = |\overrightarrow{R_R}| |M_R^{CR}| \cdot \cos \xi$$

Reemplazando (12) y (17) en (18), resulta,

$$(R_{R_x} \check{i} + R_{R_y} \check{j} + R_{R_z} \check{k}) (M_{R_x}^{CR} \check{i} + M_{R_y}^{CR} \check{j} + M_{R_z}^{CR} \check{k}) = |\overrightarrow{R_R}| |M_R^{CR}| \cdot \cos \xi \quad (19)$$

Reemplazando las componentes de  $\overrightarrow{R_R}$  y  $\overrightarrow{M_R^{CR}}$  en (19), resulta:

$$|\overrightarrow{R_R}| |M_R^{CR}| (\cos \alpha_R \cdot \cos \alpha_{MR} + \cos \beta_R \cdot \cos \beta_{MR} + \cos \gamma_R \cdot \cos \gamma_{MR}) = |\overrightarrow{R_R}| |M_R^{CR}| \cdot \cos \xi \quad (20)$$

De donde obtenemos,

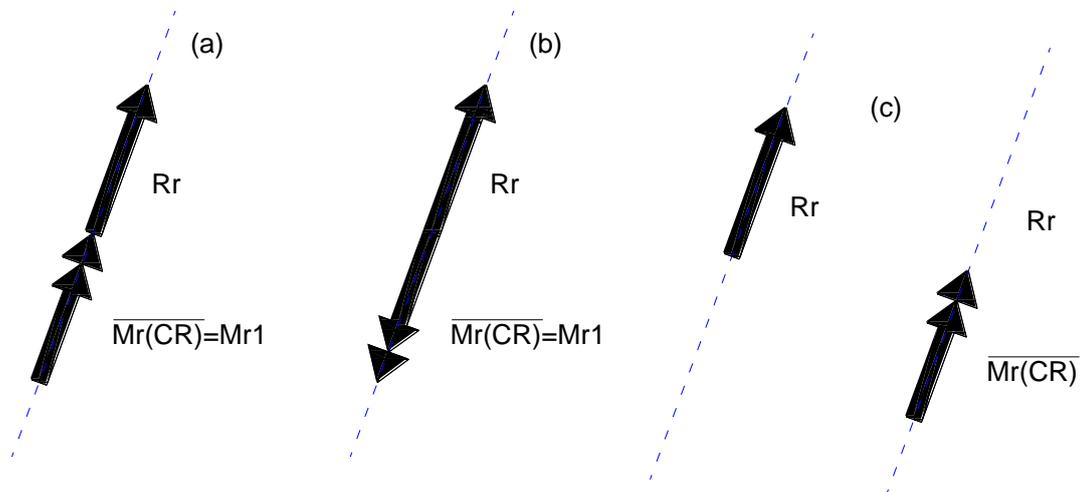
$$\cdot \cos \xi = (\cos \alpha_R \cdot \cos \alpha_{MR} + \cos \beta_R \cdot \cos \beta_{MR} + \cos \gamma_R \cdot \cos \gamma_{MR}) \quad (21)$$

### EJE CENTRAL

Existen en el espacio infinitos puntos del espacio que siendo **CR** en los que el ángulo entre la resultante de reducción y el momento de reducción  $\xi = 0$ , o  $\xi = \pi$ . En los mismos coinciden las direcciones entre ambos vectores son coincidentes.

Llamaremos **eje central** al lugar geométrico de los puntos del espacio que tomados como centro de reducción donde el vector de  $\overrightarrow{R_R}$  es paralela o coincidente con el vector de  $\overrightarrow{M_R^{CR}}$ . Esto implica que la dirección de  $\overrightarrow{M_R^{CR}}$  coincidente con  $M_{R_1}$ . En la figura n° 7 se grafica esta situación.

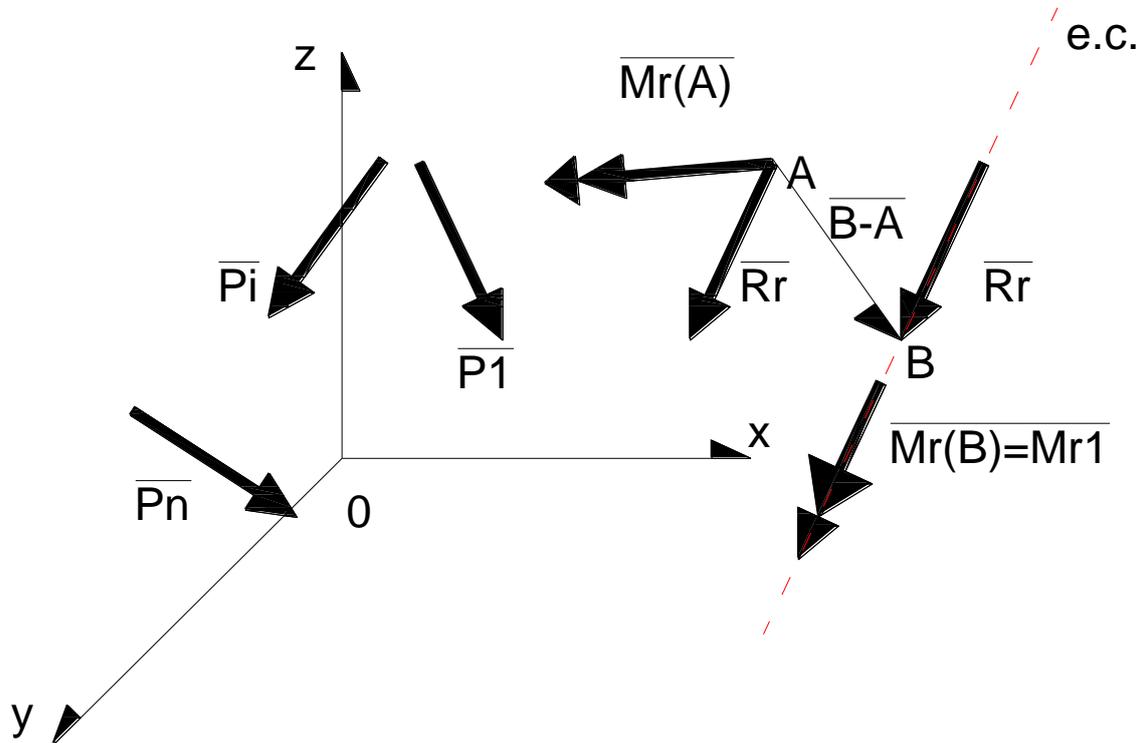
figura n<sup>o</sup> 7



#### UBICACIÓN ANALÍTICA DEL EJE CENTRAL

Supongamos reducir un sistema de fuerzas en el espacio, que reducimos a un punto **A**, como lo muestra la figura n<sup>o</sup> 8.

figura n ° 8



De la reducción resulta una resultante de reducción  $\overrightarrow{R_R}$  y un momento de reducción  $\overrightarrow{M_R^A}$ .  
Luego, reducimos estos vectores a el centro de reducción **B**, siendo este un punto del eje central. Entonces,

$$\overrightarrow{M_R^B} = \overrightarrow{M_R^A} + \overrightarrow{R_R} \times (\overrightarrow{B-A}) \quad (22)$$

Pero, siendo **B** un punto del eje central, entonces, el momento de reducción en B debe ser,

$\overrightarrow{M_R^B} = \overrightarrow{M_{R1}^B}$  que lo podemos indicar,

$$\overrightarrow{M_{R1}^B} = \overrightarrow{M_R^B} = \overrightarrow{M_R^A} + \overrightarrow{R_R} \times (\overrightarrow{B-A}) = k \cdot \overrightarrow{R_R} \quad (23)$$

siendo **k** una constante de proporcionalidad, entonces, las componentes del momento de reducción en **B** según los ejes coordenados es,

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN**  
**PÉRGOLA**

$$(24) \begin{cases} M_{Rx}^A + R_{Ry} \cdot (z_B - z_A) - R_{Rz} \cdot (y_B - y_A) = k \cdot R_{Rx} & (a) \\ M_{Ry}^A + R_{Rz} \cdot (x_B - x_A) - R_{Rx} \cdot (z_B - z_A) = k \cdot R_{Ry} & (b) \\ M_{Rz}^A + R_{Ry} \cdot (z_B - z_A) - R_{Rz} \cdot (y_B - y_A) = k \cdot R_{Rz} & (c) \end{cases}$$

Despejando la constante **k** de las tres ecuaciones (24), se obtiene,

$$(25) \begin{cases} k = \frac{M_{Rx}^A + R_{Ry} \cdot (z_B - z_A) - R_{Rz} \cdot (y_B - y_A)}{R_{Rx}} & (a) \\ k = \frac{M_{Ry}^A + R_{Rz} \cdot (x_B - x_A) - R_{Rx} \cdot (z_B - z_A)}{R_{Ry}} & (b) \\ k = \frac{M_{Rz}^A + R_{Ry} \cdot (z_B - z_A) - R_{Rz} \cdot (y_B - y_A)}{R_{Rz}} & (c) \end{cases}$$

Ahora bien, igualando las ecuaciones (25-a)=(25-b), (25-a)=(25-c), (25-b)=(25-c), se llega a un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas compatible indeterminado, puesto que existen infinitos puntos del eje central.

$$(26) \begin{cases} C_1 \cdot x_B + D_1 \cdot y_B + E_1 \cdot z_B + F_1 = 0 \\ C_2 \cdot x_B + D_2 \cdot y_B + E_2 \cdot z_B + F_2 = 0 \\ C_3 \cdot x_B + D_3 \cdot y_B + E_3 \cdot z_B + F_3 = 0 \end{cases}$$

Siendo  $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3$  coeficientes que resultan de las operaciones algebraicas realizadas para llegar al sistema (26).

Debido a que (26) es un sistema compatible indeterminado, para determinar las coordenadas de un punto del eje central, elegimos una coordenada arbitrariamente del mismo, y luego determinamos las otras 2 con el auxilio del sistema (26).

**ESTRUCTURAS FERROVIARIAS 1. APUNTE REDACTADO POR EL ING. FABIÁN**  
**PÉRGOLA**